Universidade de Aveiro Departamento de Educação
Ano 2013

Inês Cristina Fonseca Oliveira

Compêndio de Matemática de Sebastião e Silva: Equações

Universidade de Aveiro Departamento de Educação
Ano 2013

Inês Cristina Fonseca Oliveira

Compêndio de Matemática de Sebastião e Silva: Equações

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Didática - especialização em Matemática para Professores do 3.º Ciclo do Ensino Básico e Ensino Secundário, realizada sob a orientação científica do Doutor Helmuth Robert Malonek, Professor Catedrático do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

À minha filha e à minha mãe.

o júri

presidente

Prof. Doutora Isabel Maria Cabrita dos Reis Pires Pereira
professora auxiliar do Departamento de Educação da Universidade de Aveiro

Prof. Doutora Maria Cecília Rosa Pereira Peixoto da Costa
professora auxiliar com agregação do Departamento de Matemática da Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro

Prof. Doutor Helmuth Robert Malonek
professor catedrático do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

agradecimentos

O meu agradecimento e reconhecimento a todos aqueles que de forma direta ou indireta contribuíram para a realização desta dissertação.

Em particular, agradeço ao Professor Doutor Helmuth Malonek pelas suas sugestões, disponibilidade e compreensão humana e profissional.

E à minha mãe pelo incansável apoio.

palavras-chave

História do Ensino da Matemática em Portugal; José Sebastião e Silva; Equações do 1.º, 2.º e 3.º grau; Manuais escolares.

resumo

Esta dissertação, realizada no âmbito da História do Ensino da Matemática, tem como objetivo principal contribuir para um maior reconhecimento do trabalho realizado pelo professor José Sebastião e Silva na remodelação e atualização do ensino da matemática no ensino liceal nas décadas de 60 e 70 do século XX em Portugal. Este estudo centrar-se-á na abordagem didática das equações dos 1.º, 2.º e 3.º graus das diferentes reformas do ensino desde aquele período de tempo até aos nossos dias, tendo como ponto de partida o *Compêndio de Matemática* de Sebastião e Silva. Para isso, serão analisados os programas de matemática desde a segunda metade do século XX e alguns manuais escolares representativos de cada época, incluindo o próprio *Compêndio de Matemática*.

A investigação será conduzida com uma metodologia baseada na investigação histórica tendo como base a análise documental. As principais fontes do estudo serão os documentos escritos pelo próprio Sebastião e Silva (*Compêndio de Matemática* e respetivos guias de utilização), a transcrição de algumas entrevistas que concedeu, os documentos emanados pelo Ministério da Educação (legislação, programas de matemática, brochuras para os professores, …), a imprensa pedagógica, as atas de encontros de homenagem a Sebastião e Silva, os manuais escolares contemporâneos e posteriores ao *Compêndio de Matemática*, entre outros trabalhos sobre o professor. Todos estes documentos serão alvo de uma análise de conteúdo.

keywords

History of Mathematics Teaching in Portugal; José Sebastião e Silva; Equations of the 1st, 2nd and 3rd degree; Textbooks.

abstract

This dissertation, written in the framework of the History of Teaching Mathematics aims to enhance the recognition of the work carried out by Professor José Sebastião e Silva on the improvement and actualization of teaching of mathematics in secondary schools in the 60s and 70s of the 20thcentury in Portugal. This study will focusses on the didactical approach of equations of the 1st, 2nd and 3rd degrees in the education reforms since that time to the present day, taking as its starting point the *Compêndio de Matemática* of Sebastião e Silva. For this, the math programs since the second half of the twentieth century and some textbooks representing each period of that time, are analyzed, including his *Compêndio de Matemática*.
The research is conducted by a methodology based based on the analysis of historical sources. The main sources of the study are documents that were written by Sebastião e Silva himself (*Compêndio de Matemática* and user guides), the transcription of some of the interviews he gave, the documents released by the Ministério da Educação (legislation, math programs, brochures for teachers, ...), the pedagogical press, the reports of meetings in honor of Sebastião e Silva, as well as contemporary textbooks using the *Compêndio de Matemática* and articles about Sebastião e Silva. The content of all those documents has been analyzed.

Índice

«É de vida, é de alma,
que o ensino está necessitado.»
José Sebastião e Silva

1. Introdução

«O particular valor da investigação histórica em educação é inquestionável» (Cohen & Manion, 1986). Apesar de ser uma área difícil para se empreender uma investigação, o resultado desta pode trazer grandes benefícios aos educadores e à sociedade, em geral. Pode, por exemplo, produzir conhecimento para alguns problemas educativos que não seriam atingidos por outros meios. Um estudo histórico de uma ideia educativa ou instituição pode ajudar-nos, por exemplo, a perceber como surgiu o nosso atual sistema educativo; e este tipo de conhecimento pode, por sua vez, ajudar a estabelecer uma base sólida para posteriores progressos. A investigação histórica em educação pode também mostrar como e porquê se desenvolveram algumas teorias e práticas educativas: usando velhas práticas para avaliar outras mais recentes e daí emergindo novas.

A investigação histórica em educação pode centrar-se num indivíduo, num grupo, num movimento, numa ideia ou numa instituição, mas nenhum destes objetos de estudo histórico pode ser tomado como isolado. Nenhuma pessoa pode ser submetida a uma investigação histórica sem serem feitas algumas considerações acerca das suas contribuições para as ideias, movimentos ou instituições num determinado momento de tempo e de espaço. Estes elementos estão sempre interligados (Cohen & Manion, 1986).

José Sebastião e Silva (1914 - 1972) foi um professor e investigador português que marcou de forma indelével a matemática e o seu ensino ao longo de várias décadas do século passado. São suas as palavras que constituem o ponto de partida deste estudo:

> «A modernização do ensino da matemática terá de ser feita não só quanto a programas, mas também quanto a métodos de ensino. O professor deve abandonar, tanto quanto possível, o método expositivo tradicional, em que o papel dos alunos é quase cem por cento passivo, e procurar, pelo contrário, seguir o método activo, estabelecendo diálogo com os alunos e estimulando a imaginação destes, de modo a conduzi-los, sempre que possível, à redescoberta».
> Silva (1975d, p.11)

Sebastião e Silva redigiu, na década de 60, o *Compêndio de Matemática* para os alunos e o *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática* para os professores, textos estes que aparecem, ainda hoje, referenciados na bibliografia dos documentos relativos aos programas de matemática do ensino secundário do Ministério da Educação.

O presente estudo que se situa no âmbito da História do Ensino da Matemática pretende ajudar a dar a conhecer o contributo dado pelo professor José Sebastião e Silva para o processo ensino-aprendizagem da matemática, em geral, e para as equações dos 1.º, 2.º e 3.º graus, em particular. Pretende também, investigar a herança didática deixada pelo professor no *Compêndio de Matemática* que foi apropriada pelos manuais escolares posteriores, no que diz respeito às equações a uma incógnita dos 1.º, 2.º e 3.º graus.

A investigação será conduzida com uma metodologia baseada na investigação histórica tendo como base a análise documental. As principais fontes do estudo serão os documentos escritos pelo próprio professor Sebastião e Silva (o *Compêndio de Matemática* e respetivos guias de utilização), a transcrição das entrevistas que concedeu em 1966 e 1968, os documentos emanados pelo Ministério da Educação (legislação, programas de matemática, brochuras para os professores, …), a imprensa pedagógica, as atas de encontros de homenagem a José Sebastião e Silva, os manuais escolares contemporâneos e posteriores ao *Compêndio de Matemática*, entre outros trabalhos sobre o professor. A todos estes documentos se fará uma análise de conteúdo no sentido de se atingir os objetivos referidos.

É de salientar que este estudo é uma investigação de continuidade, ou seja, é uma investigação na linha da adotada por Abreu (2011). Na sua investigação, a autora faz um estudo acerca do modo como o tema do cálculo diferencial é abordado no *Compêndio de Matemática* de José Sebastião e Silva, ao qual se pretende, agora, dar seguimento, mas desta vez relativamente às equações dos 1.º, 2.º e 3.º graus a uma incógnita.

Com este estudo espera-se contribuir para um maior reconhecimento da importância do trabalho realizado pelo professor Sebastião e Silva na remodelação e atualização do ensino da matemática no século XX. Para isso, far-se-á um enquadramento histórico do *Compêndio de Matemática*, começando-se por caracterizar os contextos sociopolítico e educativo dos anos 50 e 60 do século passado em Portugal. Seguir-se-á, no capítulo 3, uma breve biografia do professor Sebastião e Silva, uma síntese do seu pensamento relativamente às questões da educação e da pedagogia da matemática e que terão servido de base para a conceção e implementação da experiência pedagógica nos liceus portugueses pelo professor. Em seguida apresentar-se-á uma descrição geral do *Compêndio de Matemática* e do *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática*. A rematar este capítulo, refere-se a relação que existiu entre o *Compêndio de Matemática* e o ano propedêutico que vigorou em finais da década de 70 e início da década de 80.

No quarto capítulo, proceder-se-á a um estudo das equações dos 1.º, 2.º e 3.º graus. Começar-se-á com uma curta descrição da abordagem dada ao assunto por Pedro Nunes, que, segundo Estrada, Sá, Queiró, Silva e Costa (2000, p. 590), «foi o maior nome da Matemática portuguesa do século XVI e mesmo de sempre». Será feita uma análise do *Compêndio de Matemática*, em geral, e dos pontos sobre as equações dos 1.º, 2.º e 3.º graus, em particular, depois de se fazer um estudo, numa perspetiva histórica, da abordagem deste tipo de equações nos programas de matemática no período de tempo que vai desde a época do *Compêndio* até à atualidade. A análise do *Compêndio de Matemática* considerará três dimensões que serão identificadas por *organização e grafismo*, *aspetos didáticos* e *aspetos fenomenológicos*, de acordo com Sierra, González e López (2003). Por fim, far-se-á uma análise, com base nas mesmas três dimensões, de outros manuais escolares começando com aqueles que foram contemporâneos do *Compêndio* até à atualidade, com o objetivo de se investigar a didática na abordagem das equações dos 1.º, 2.º e 3.º graus e de se avaliar a influência do *Compêndio* nos manuais escolares que lhe sucederam.

Segundo António Almeida Costa, em Esteves (2013), Sebastião e Silva foi «um excecional matemático e pedagogo português na área do ensino da matemática no século XX».

2. Enquadramento histórico

O *Compêndio de Matemática* de José Sebastião e Silva surge na década de 60 do século passado associado a uma experiência pedagógica que tinha como objetivo renovar e melhorar os programas e os métodos de ensino da matemática nos liceus em Portugal. Nesta época vigorava, em todo o seu esplendor, o *Estado Novo* – termo que foi cunhado por volta de 1930 e desde então nunca mais abandonado – que seria social e corporativo. A sua célula de base encontrar-se-ia na família, os seus elementos fundamentais, nas corporações morais, económicas e intelectuais, onde os interesses de patrões e empregados se harmonizariam com vista a um interesse comum: o nacional. (Marques, 2012)

A posição de neutralidade que Portugal assumiu na segunda guerra mundial permitiu a sobrevivência do regime salazarista. Apesar de alguns sobressaltos e do desencadear de uma dura guerra nas colónias, a vida política do país manteve uma feição autoritária, a que nem mesmo a doença e substituição do velho ditador foi capaz de pôr fim. Portugal não soube também acompanhar o ritmo económico das nações mais desenvolvidas. O *Estado Novo* estava, nos primeiros anos da década de 70, à beira do fim.

O enquadramento histórico do surgimento do *Compêndio de Matemática*, que se segue refere-se, essencialmente, aos contextos sociopolítico e educativo dos anos 50 e 60 do século XX.

2.1. Contexto sociopolítico nos anos 50 e 60 em Portugal

A década de 50 ficou marcada pelas consequências do fim da 2.ª guerra mundial, que ocorrera em 1945. O termo do conflito estabeleceu uma nova ordem política, social e económica para a Europa, colocando a educação como uma das prioridades. Portugal encontrava-se sob a ditadura do governo de Oliveira Salazar[1], cuja ideologia educacional assentava na trilogia: «Deus, Pátria e Família». Desfasado politicamente em relação à Europa democrática, Portugal também não acompanhou o ritmo económico das nações mais desenvolvidas. No entanto, reconhece-se que existiu algum desenvolvimento ao qual foi necessário fazer face com a formação de recursos humanos especializados para os diferentes setores produtivos.

Durante o período de ditadura foram proibidos os partidos políticos, as sociedades secretas e as associações sindicais. Apenas existia uma organização, a União Nacional[2], da qual provinham todos os elementos que compunham a Assembleia Nacional. A autoridade do regime fazia-se sentir de inúmeras formas, através da censura, da repressão policial, das prisões arbitrárias e exílios, entre outras. A oposição a esta situação foi crescendo e organizaram-se revoltas, movimentos revolucionários e tentativas de golpe de estado às quais o regime soube dar resposta anulando-os.

No ano de 1949, o movimento de oposição ao regime tem uma nova oportunidade de mobilização, desta vez em torno da candidatura de Norton de Matos às eleições presidenciais, sendo a primeira vez que um candidato da oposição concorria à presidência da república. A sua concorrência entusiasmou o país, da mesma forma que o desiludiu com a sua desistência, enfraquecendo assim a oposição democrática. Norton de Matos retira-se da corrida eleitoral alguns dias antes da votação por não ter conseguido quaisquer garantias de que houvesse liberdade de voto e nem a reforma dos cadernos eleitorais. Desta feita, Óscar Carmona[3] foi reeleito. (Marques, 2012)

A morte de Carmona, em abril de 1951, deu origem a novas eleições. Os moderados oposicionistas propuseram o almirante Quintão Meireles, que se retirou da campanha nas vésperas do ato eleitoral e a esquerda apresentou Ruy Luís Gomes[4], matemático e professor universitário de renome, cuja candidatura foi rejeitada pelos efeitos

[1] António de Oliveira Salazar (1889 - 1970), respeitado professor de economia e finanças na Universidade de Coimbra, foi por duas vezes, nomeado ministro das finanças. A primeira vez em 30 de maio de 1926 e a segunda em 27 de abril de 1928. Assim se iniciava a sua carreira de ditador que se prolongaria por quarenta anos. (Carvalho, 1986)

[2] A União Nacional era entendida como uma associação política de caráter cívico onde os portugueses se uniam para o «engrandecimento da Nação», durante o *Estado Novo*. (Marques, 2012)

[3] António Óscar de Fragoso Carmona (1869 - 1951) foi presidente da república de 1926 a abril de 1951.

[4] Entre 1945 e 1957, Ruy Luís Gomes (1905 - 1984) esteve preso em, pelo menos, dez ocasiões, devido à sua atividade política. Foi vice-presidente da Comissão Distrital do Porto da candidatura presidencial do general Norton de Matos, em 1949. Exilou-se na Argentina, de 1958 a 1962, e no Brasil, de 1962 a 1974. (Bebiano, 2006)

retroativos de uma lei. Desta forma, o candidato do governo, general Craveiro Lopes[5], foi eleito sem oposição. (Bebiano, 2006; Marques, 2012)

Em 1955, a conjuntura internacional permitiu a entrada de Portugal nas Nações Unidas; no país intensificou-se a política de obras públicas, fomentou-se a industrialização e aumentaram-se os salários. Na opinião de Marques (2012), a estabilidade ao nível governamental aumentou, tal como a repressão e a censura. Carvalho (1986, p. 783) partilha da mesma opinião ao afirmar que «ao contrário do que se supunha, a repressão do Estado não só se manteve como se acentuou».

O governo pensou ter controlado a situação política até que, em 1958, a candidatura de Humberto Delgado[6] a novas eleições presidenciais desencadeou um autêntico terramoto político. Conhecido como o *General Sem Medo,* anunciou o seu propósito de não desistir das eleições e anunciou a sua intenção de demitir Salazar com a célebre frase: «*Obviamente demito-o!*». Contra a sua campanha, o governo tentou de todas as formas limitar-lhe os movimentos e acusou-o de provocar «agitação social».

Concluídas as eleições presidenciais, o resultado revelou mais uma vitória esmagadora do candidato do regime, Américo Tomás[7], mas desta vez, a credibilidade do governo ficou indelevelmente abalada. Salazar tomou consciência de que outro terramoto político poderia acontecer e que começava a ser difícil para o regime continuar a enganar a opinião pública e simultaneamente subtrair-se às opressões da comunidade internacional. Por isso, Salazar introduziu uma alteração à Constituição, segundo a qual era anulada a eleição do Presidente da República por sufrágio direto, passando este a ser eleito por um colégio eleitoral restrito.

Após as eleições, Humberto Delgado foi destituído das suas funções militares e, para poder continuar a desenvolver a sua ação em prol da democracia, exilou-se no Brasil e em 1963, fixou-se na Argélia. A sua ação era de tal modo influente que acabou por ser assassinado em 1965 por elementos da P.I.D.E.[8].

A necessidade de divulgar internacionalmente a natureza antidemocrática do regime levou a oposição a intensificar a sua ação de contestação, recorrendo a atos de

[5] Francisco Craveiro Lopes (1894 - 1964) foi presidente da república de 1951 a 1958.
[6] Humberto da Silva Delgado (1906 - 1965) era um oficial-aviador no ativo e, na época, diretor geral da Aeronáutica Civil. Delgado fora outrora um partidário acérrimo da ditadura e admirador de Salazar.
[7] Américo de Deus Rodrigues Tomás (1894 - 1987) foi presidente da república de 1958 a 25 de abril de 1974.
[8] P.I.D.E. – Polícia Internacional e de Defesa do Estado, assim denominada a partir de 1945, quando as suas atribuições foram consideravelmente ampliadas. Desde a década de 30 até esta data, chamava-se P.V.D.E. - Polícia de Vigilância e de Defesa do Estado. (Marques, 2012)

maior impacto, como por exemplo: - o bispo do Porto escreve uma carta onde tece críticas contundentes relativas à situação político-social e religiosa do país. A consequência foi o seu exílio; - em janeiro de 1961, em pleno mar das Caraíbas, o navio português *Santa Maria* é assaltado e ocupado por exilados políticos, chefiados por Humberto Delgado e Henrique Galvão, como forma de protesto contra a falta de liberdade cívica e política em Portugal. Apesar da tentativa por parte do governo em evitar a compreensão deste ato, as instâncias internacionais souberam-no e entenderam-no como um ato legítimo de protesto.

Para além destes atos oposicionistas, a eclosão da guerra colonial nas *províncias ultramarinas* trouxe ao regime a sua maior e derradeira prova.

Em 1968, perante a intensificação da oposição interna e das denúncias internacionais do colonialismo português, o afastamento, por doença, de Salazar, parecia finalmente abrir as portas do regime à liberalização democrática.

A presidência do Conselho de Ministros foi entregue a Marcelo Caetano, a 27 de setembro de 1968, que subordinou a sua ação política a um original princípio de *renovação na continuidade*. Pretendia assim, conciliar os interesses políticos dos setores conservadores com as crescentes exigências de democratização do regime. *Continuidade* para uns, *renovação* para outros.

Nos dois primeiros anos de ação governativa, Marcelo Caetano empreendeu alguma dinâmica reformista ao regime: permitiu o regresso de alguns exilados, como o bispo do Porto e Mário Soares[9]; abrandou a repressão policial e a censura; permitiu a abertura da União Nacional, renomeada na década de 70, por *Acção Nacional Popular* (A.N.P.); mudou o nome da P.I.D.E. para *Direcção-Geral de Segurança* (D.G.S.); deu direito de voto às mulheres alfabetizadas; legalizou os movimentos políticos opositores ao regime; permitiu a consulta dos cadernos eleitorais e a fiscalização das mesas de voto; e, prometeu uma reforma democrática do ensino (para a qual o ministro Veiga Simão[10] viria a aprovar as bases, em 25 de julho de 1973, mas cuja reforma nunca chegaria a ser implementada devido à queda do regime ditatorial em 1974).

Foi neste clima de mudança, conhecido por *Primavera Marcelista*, que se prepararam as eleições legislativas de 1969, nas quais a oposição não elegeu qualquer

[9] Mário Alberto Nobre Lopes Soares (n. 1924) foi o advogado da família Delgado após o assassinato de Humberto Delgado. Em consequência das suas múltiplas atividades políticas oposicionistas, foi preso várias vezes tendo sido deportado para São Tomé (1968-1969) e vivido no exílio em Paris (1970-1974).

[10] José Veiga Simão (n. 1929), professor da Faculdade de Ciências de Coimbra, exerceu o cargo de ministro da educação nacional de 15 de janeiro de 1970 até 25 de abril de 1974.

deputado. As eleições acabaram por constituir, uma vez mais, uma fraude. A Assembleia Nacional continuava assim, no início da década de 70, dominada pelos eleitos da lista do regime, apesar de entre estes existir uma ala liberal de jovens deputados cuja voz era abafada pela ala mais conservadora.

2.2. Contexto educativo nos anos 50 e 60 em Portugal

Nas décadas de 50 e 60 do século passado, o ensino liceal encontrava-se estruturado segundo a reforma preconizada em 1947, pelo então ministro da educação nacional Pires de Lima[11]. Este repôs o esquema de estudos que o ministro Carneiro Pacheco[12] havia alterado em 1936, ou seja, o curso geral dos liceus voltou a ter a duração de 5 anos, em regime de classes, e o curso complementar 2 anos, em regime de disciplinas e bifurcado em letras e ciências. Reduziram-se os programas e alteraram-se os currículos, sendo de destacar a supressão do ensino do latim no curso geral, exceto para os alunos que pretendessem matricular-se nas Faculdades de Letras e de Direito, e, também para estes, foi acrescentado o ensino do grego que havia sido excluído desde 1894 aquando da reforma de Jaime Moniz[13]. Na tabela 1 apresenta-se a estrutura do ensino liceal de acordo com a reforma de 1947.

Ensino Liceal – 1947						
Curso Geral					**Curso Complementar**	
1.º ciclo		**2.º ciclo**			**3.º ciclo**	
1.º ano	2.º ano	3.º ano	4.º ano	5.º ano	6.º ano	7.º ano

Tabela 1 – Estrutura do ensino liceal em 1947.

[11] Fernando Andrade de Pires de Lima (1906 - 1970), professor da Faculdade de Direito de Coimbra, foi designado ministro da educação nacional a 4 de fevereiro de 1947.
[12] António Faria Carneiro Pacheco (1887 - 1950), professor da Faculdade de Direito de Lisboa, foi designado ministro da Instrução Pública a 18 de janeiro de 1936. A 11 de abril desse ano, é alterado o nome do próprio ministério na lei intitulada «Remodelação do Ministério da Instrução Pública» que tem como primeira afirmação: «O Ministério da Instrução Pública passa a denominar-se Ministério da Educação Nacional.» (Carvalho, 1986, p. 753)
[13] Jaime Constantino de Freitas Moniz (1837 - 1917), membro do Conselho Superior de Instrução Pública e professor do Curso Superior de Letras, foi o autor da chamada «Reforma de Jaime Moniz» que, segundo Carvalho (1986), foi «uma das reformas mais bem planeadas de toda a história do nosso ensino, solidamente apoiada num estudo amplo, demorado e minucioso.»

O ensino liceal, em 1947, revestia-se de um caráter, simultaneamente humanista, educativo e de preparação para a vida, pela determinação, disposição e conteúdo das disciplinas (decreto-lei n.º 36 507, de 17 de setembro de 1947, artigo 1.º).

De acordo com o artigo 2.º do mesmo decreto-lei, era objetivo do curso geral, «preparar para a sequência de estudos e ministrar a cultura mais conveniente para a satisfação das necessidades comuns da vida social, a par dos fins de revigoramento físico, de aperfeiçoamento das faculdades intelectuais, de formação do carácter e do valor profissional e de fortalecimento das virtudes morais e cívicas». O curso complementar, para além de manter os mesmos objetivos, estava especialmente destinado a preparar os alunos para «o ingresso em escolas superiores». O estatuto do ensino liceal foi aprovado pelo decreto n.º 36 508, de 17 de setembro de 1947.

Relativamente aos manuais escolares, esta reforma impunha o uso do mesmo livro para todos os liceus do país. No decreto-lei que a promulga pode ler-se:

> «Os compêndios escolares deverão circunscrever-se rigorosamente às matérias dos programas e só poderão ser adoptados depois de aprovação obtida em concurso aberto pelo Ministério da Educação Nacional. Para o ensino de cada disciplina nos diferentes anos de um ciclo será adoptado em todos os liceus o mesmo livro, que poderá ser dividido em tomos, um para cada ano.» (Decreto-lei n.º 36 507, de 17 de setembro de 1947, artigo 9.º)

No capítulo XII, do decreto n.º 36 508, de 17 de setembro de 1947, Estatuto do Ensino Liceal, que regula os livros didáticos e material escolar, na sua secção I, que trata dos *Compêndios*, pode ler-se:

> «1. A aprovação dos livros é feita mediante concurso público e terá validade por períodos de 5 anos.
> 2. A apresentação de livros a concurso será feita até ao fim do mês de Setembro do ano anterior àquele em que tem começo cada período.» (artigo 391.º)
>
> «O primeiro dos períodos de cinco anos terá o seu início no dia 1 de Outubro de 1949.» (artigo 392.º)

Ainda através do estatuto do ensino liceal, no seu 173.º artigo, é criada a Inspecção do Ensino Liceal, constituída por um inspetor superior e 4 inspetores, sobre a qual Carvalho (1986, p. 789) refere que era «um órgão imprescindível de natureza disciplinar» sem o qual o ministério não dispunha de «elementos que lhe permitam conhecer e fiscalizar o serviço docente.»

Em junho do mesmo ano, Pires de Lima procede a uma reforma do ensino técnico, profissional, industrial e comercial na qual estabeleceu dois graus: um primeiro grau constituído por um ciclo preparatório elementar e de pré-aprendizagem geral, com a duração de 2 anos, e um segundo grau constituído por cursos de aprendizagem, de formação e de aperfeiçoamento profissionais, com a duração máxima de 4 anos. Acentuava-se desta forma, a separação entre liceus e escolas técnicas, aqueles funcionando como via de acesso privilegiada ao ensino universitário, estas visando a formação de mão de obra especializada e o acesso ao ensino médio. Seria preciso esperar quase 20 anos para se proceder à unificação do 1.º ciclo dos ensinos técnico e liceal e pela revolução do 25 de Abril para se pôr fim à discriminação entre estes dois ramos do ensino, cuja opção de frequência era determinada, em última análise, por razões de caráter social e económico.

No ano de 1952, ainda com Pires de Lima como ministro da educação, tenta-se dar um impulso no sentido de se eliminar o analfabetismo em Portugal e o absentismo nas escolas. Para isso promulga-se o chamado *Plano de Educação Popular*, cujo primeiro objetivo era, segundo Carvalho (1986, p. 785), o de tornar «exequível o princípio da escolaridade obrigatória» e cuja finalidade era «Despertar e desenvolver no nosso povo, por processos directos e indirectos, por métodos suasórios ou repressivos, um interesse esclarecido pela instrução».

A obrigatoriedade do ensino primário elementar que era constituído por 3 anos e que atingia até essa altura, todas as crianças dos 7 aos 11 anos, passaria então a prolongar-se por mais um ano, dos 7 aos 12 anos de idade, de acordo com o decreto-lei n.º 38 968 de 27 de outubro de 1952.

O processo envolveu, naturalmente, as crianças do grupo etário correspondente à então instrução primária, mas envolveu também os adultos. Para estes, o plano distinguia dois tipos de ação: os Cursos de Educação de Adultos e a Campanha Nacional de Educação de Adultos. Os cursos, que apesar de já existirem e funcionarem com aulas noturnas apenas de 1 de novembro a 30 de abril, passaram, com o estabelecimento do plano, a realizarem-se de dia e de noite e a prolongarem-se até 31 de maio. A Campanha Nacional de Educação de Adultos, especialmente dirigida para os analfabetos com idades compreendidas entre os 14 e os 35 anos, tinha como propósito alertar a opinião pública para o problema do analfabetismo e pretendia transmitir aos analfabetos não apenas os rudimentos da leitura, da escrita e do cálculo, mas também contribuir para a educação do povo.

Quando Pires de Lima deixa o Ministério da Educação Nacional, três anos após o lançamento deste plano, é inegável o progresso conseguido no sentido da extinção do analfabetismo e absentismo em Portugal, dado que em 1955 apenas 1% das crianças em idade escolar não frequentava a escola primária. A evolução[14] da frequência escolar das crianças desde 1911 a 1955 é bem visível na tabela 2.

Anos	**População de 7 a 11 anos**	**Crianças sem ensino dos 7 aos 11 anos**	**Percentagens**
1911	670 168	532 112	79,4
1930	707 971	517 604	73,1
1940	813 230	376 018	46,2
1950	768 271	156 219	20,3
1955	858 800	8 891	1,0

Tabela 2 – Evolução da frequência escolar das crianças de 7 a 11 anos. (Carvalho, 1986)

O rápido desenvolvimento da indústria e da economia, assim como, o novo mundo da automação exigiam novos progressos na investigação matemática e, simultaneamente, uma formação atualizada. Terminada a 2.ª guerra mundial, nos países maltratados pela guerra, havia que se proceder a uma atividade regeneradora, procurando-se trabalhar no que fora destruído, mas também desenvolver uma nova conceção técnica para redesenhar um novo mundo. O ensino, onde todas as alterações sociais se repercutem, deveria ser totalmente revisto, alertando para a evidência de que, o saber ler, escrever e contar se tornara uma cultura insuficiente.

Ainda durante a vigência de Pires de Lima, em 1955, o Instituto de Alta Cultura nomeia uma subcomissão, formada pelos professores José Sebastião e Silva, José Vicente Gonçalves, José Jorge Gonçalves Calado e José Duarte da Silva Paulo, para integrar a

[14] Os valores referentes a 1955 não eram definitivos, sendo o valor da população apenas estimado, dado que, somente em 1960 houve recenseamento; o valor referente às crianças sem ensino (8891) havia sido obtido por inquérito efetuado pela Direcção-Geral do Ensino Primário. (Carvalho, 1986)

Comissão Internacional do Ensino da Matemática[15]. Esta subcomissão foi apresentada como a delegação oficial portuguesa junto da C.I.E.M. Apresenta-se na figura 1, a publicação da adesão de Portugal à C.I.E.M. na revista L'Enseignement Mathématique, II.ª Série, Tome I, 1955, página 202. (Matos, 1989)

III

Désignation de nouveaux délégués a la C.I.E.M.

Postérieurement à la réunion du Comité exécutif à Genève, le 2 juillet 1955, six nations ont fait connaître à M. le président Behnke les noms de leurs délégués à la C.I.E.M. En voici la liste, qui complète les indications données ci-dessus, dans le compte rendu de la réunion du 2 juillet:

République Argentine:	Prof. A. Sagastume; Ing. José Babini.
Australie:	Prof. T. G. Room; Dr. Chong, Senior Lecturer.
Belgique:	Inspecteur W. Servais.
Luxembourg:	Prof. Dr Gloden.
Norvège:	Prof. K. Piene
Portugal:	Prof. Sebâtiao Silva; Prof. Vicente Gonçalves; Prof. Gonçalves Calado; Prof. da Silva Paulo.

Fig. 1- Adesão de Portugal à C.I.E.M. Designação dos novos delegados. (Matos, 1989)

No dia 7 de julho de 1955 ocorre mais uma mudança na pasta da educação: a Pires de Lima sucede Leite Pinto[16], para quem era evidente o atraso do nosso país, urgente uma remodelação das linhas de atuação e crucial o investimento em técnicos especializados e competentes que pudessem fazer face ao «deplorável atraso» em «relação aos países ocidentais que já construíram um mundo de abundância». (Carvalho, 1986, p. 794)

Na opinião de Carvalho (1986), a consciencialização da necessidade do estabelecimento de relações entre a educação e a economia que o novo mundo exigia constituiu um fator decisivo para os desafios seguintes ao nível da educação. Em 1959, foram efetivamente projetados os primeiros passos. Para o efeito, foi elaborado o *Plano de Fomento Cultural* cuja concretização, quer pelos meios técnicos quer pelos meios financeiros, excedia as possibilidades nacionais, o que terá conduzido a conversações com

[15] Em 1952, na assembleia geral da International Mathematical Union, em Roma, decide-se recriar a International Comission on Mathematical Instruction (I.C.M.I., ou, na versão francesa e portuguesa, C.I.E.M.), que tinha sido fundada em 1908. Posteriormente, em 1955, dá-se um grande impulso na definição do campo de ação desta comissão. (Matos, 1989)

[16] Francisco de Paula Leite Pinto (1902 - 2000), engenheiro e professor catedrático da Universidade Técnica, foi designado ministro da educação nacional a 7 de julho de 1955. Era uma personalidade muito conceituada no meio académico e científico e para Carvalho (1986), esta ascensão poderia constituir um sinal de que algo estaria a mudar em Portugal.

organismos internacionais ligados aos estudos em causa, nomeadamente, com a O.C.D.E.[17] no sentido de se proceder a um trabalho em comum.

Esta iniciativa sugerida por Leite Pinto foi muito bem aceite pela organização, que considerou útil a sua extensão a outros países mediterrânicos, resultando assim, numa alargada assistência dos especialistas da O.C.D.E. a Portugal, Espanha, Itália, Jugoslávia, Grécia e Turquia. O plano comum denominou-se *Projecto Regional do Mediterrâneo*[18], cujos resultados apenas foram visíveis após a saída de Leite Pinto do ministério.

Para Carvalho (1986), os contributos mais significativos deste ministro decorreram da reforma do ensino primário, pelo decreto-lei n.º 40 964, com data de 31 de dezembro de 1956, no qual se alargava o período de escolaridade obrigatória às quatro classes do ensino primário, mas apenas para as crianças do sexo masculino. Cerca de três anos e meio mais tarde, pelo decreto-lei n.º 42 994, de 28 de maio de 1960, Leite Pinto generaliza a obrigatoriedade do ensino primário para todas as crianças independentemente do género.

Segundo Carvalho (1986), a atuação de Leite Pinto não foi de total agrado de Salazar, tendo este optado por procurar para a pasta da educação personalidades formadas pelas universidades clássicas, com mentalidades mais próximas da sua. Deste modo, até Salazar ter o acidente que o haveria de afastar da governação, houve três ministros: Manuel Lopes de Almeida[19], Inocêncio Galvão Teles[20] e José Hermano Saraiva[21].

Após o curto período de tempo do ministério de Lopes de Almeida em que a linha de ação apontada por Leite Pinto não teve qualquer continuidade, surge Galvão Teles que a faz ressurgir com a publicação do relatório do *Projecto Regional do Mediterrâneo*, a 2 de abril de 1964.

De acordo com as palavras de Galvão Teles, esse projeto propunha-se, fundamentalmente:

---

[17] O.C.D.E. - Organização de Cooperação e de Desenvolvimento Económicos.

[18] Os trabalhos do grupo português realizaram-se no Centro de Estudos de Estatística Económica, do Instituto de Alta Cultura, com a colaboração do diretor do Centro, Alves Martins, de Alves Caetano, Simões Lopes, Morgado Cândido e de outros auxiliares técnicos. (Carvalho, 1986)

[19] Manuel Lopes de Almeida (1900 - 1980), professor catedrático da Faculdade de Letras da Universidade de Coimbra, foi designado ministro da educação nacional a 4 de maio de 1961. Apesar de apenas ter estado no poder cerca de ano e meio, foi da sua responsabilidade a criação da Faculdade de Letras da Universidade do Porto e a criação dos Estudos Gerais Universitários nas então províncias ultramarinas de Angola e Moçambique. (Carvalho, 1986)

[20] Inocêncio Galvão Teles (1917 - 2010), professor da Faculdade de Direito de Lisboa, foi designado ministro da educação nacional a 4 de dezembro de 1962.

[21] José Hermano Saraiva (1919 - 2012), advogado e professor do ensino liceal, foi designado ministro da educação nacional a 19 de agosto de 1968, tendo-se mantido no cargo apenas cerca de ano e meio.

> «(…) estabelecer, em termos quantitativos, a evolução que deverá, ou deveria, sofrer o sistema escolar português, durante certo período de tempo, a fim de estar apto a preparar o pessoal qualificado requerido pela economia portuguesa metropolitana.[…] Trata-se, pois, essencialmente, de uma análise feita à luz de pontos de vista económicos. O período de tempo considerado para este fim foi de quinze anos, de 1960 a 1975, uma parte do qual, aliás, já se encontra decorrido.» Carvalho (1986, p. 798)

Este projeto revestia-se de dois aspetos fundamentais: um, qualitativo, em que o objetivo seria a promulgação de um Estatuto da Educação Nacional; e outro, quantitativo, onde estariam inseridas, predominantemente, as preocupações de índole económica.

Os compromissos internacionais que se iam estabelecendo com a O.C.D.E. ajudaram à promoção de um ambiente mais propício a alterações ao nível do funcionamento educativo interno. Uma dessas alterações foi a reformulação, por decreto-lei n.º 47 311, de 12 de novembro de 1966, dos estatutos da *Mocidade Portuguesa*[22], onde se confirmam os objetivos anteriormente estabelecidos no regulamento, à exceção de apenas um, o «culto do dever militar». Uma outra alteração, foi o alargamento da escolaridade obrigatória para 6 anos e para ambos os sexos, pelo decreto-lei n.º 45 810, de 9 de julho de 1964. O ensino primário passa então, a ser constituído por dois ciclos: um, elementar, correspondente às primeiras 4 classes, e outro, complementar, com duas novas classes, como se pode observar na tabela 3.

Ensino Primário – 1964	
Curso Elementar	**Curso Complementar**
4 classes	2 classes

Tabela 3 – Estrutura do ensino primário em 1964.

Segundo Carvalho (1986), todas as crianças que não pretendessem prosseguir estudos teriam de efetuar as 6 classes. As que ambicionassem seguir estudos frequentariam apenas as primeiras quatro classes e, após aprovação no exame da 4.ª classe, efetuariam matrícula no 1.° ciclo do ensino liceal ou no ciclo preparatório técnico. Este processo viria a revelar-se bastante frágil uma vez que implicava que uma criança com apenas 10 ou 11

[22] A organização nacional Mocidade Portuguesa foi criada em cumprimento da Base XI da lei de 11 de abril de 1936. O respetivo regulamento foi publicado a 4 de dezembro de 1936 e obrigava a fidelização de todos os portugueses dos 7 aos 14 anos, sendo que os filiados estudantes tinham o privilégio de poder permanecer na organização até aos 26 anos. A organização dividia-se em quatro escalões: os lusitos (dos 7 aos 10 anos), os infantes (dos 10 aos 14 anos), os vanguardistas (dos 14 aos 17 anos) e os cadetes (dos 17 aos 26 anos). Estes últimos seriam comandados por um oficial superior do exército ou da armada e constituiriam a milícia pré-militar. A Mocidade Portuguesa Feminina viria a ser instituída um ano mais tarde. (Carvalho, 1986)

anos tivesse de decidir por uma das duas vias (preâmbulo do decreto-lei n.º 47 480, de 2 de janeiro de 1967).

Na sequência da debilidade detetada neste processo e para que o momento de escolha por parte dos alunos fosse adiado por mais dois anos, Galvão Teles criou, com o decreto-lei n.º 47 480, de 2 de janeiro de 1967, o Ciclo Preparatório do Ensino Secundário, que se destinava a fundir num só, o 1.º ciclo do ensino liceal e o ciclo preparatório do ensino técnico profissional. Este novo Ciclo Preparatório do Ensino Secundário, ministrado em edifícios próprios e com separação de sexos, seria constituído por 2 anos e a sua frequência exigiria que os alunos tivessem obtido aprovação no exame da 4.ª classe. Após a conclusão deste ciclo preparatório, os alunos que pretendessem prosseguir estudos eram então sujeitos a um exame de aptidão ao ramo do ensino secundário, liceal ou técnico, conforme a sua opção (decreto-lei n.º 47 480, artigo 6.º); os que não pretendessem prosseguir estudos fariam um exame de fim de ciclo (decreto-lei n.º 47 480, artigo7.º).

O ministério de Galvão Teles ficou também marcado pelo aproveitamento dos recursos audiovisuais para fins educativos. Em 1963, é criado no Instituto de Alta Cultura, o Centro de Estudos de Pedagogia Áudio-Visual, que tinha como finalidade:

> «(…) proceder ao estudo e experimentação dos processos áudio-visuais – designadamente cinema, projecção fixa, rádio, gravação sonora e televisão – nas suas aplicações ao ensino e à educação, e bem assim, estimular e coordenar essas aplicações e fazer a apreciação dos seus resultados». (Decreto n.º 45 418/1963, de 9 de dezembro, artigo 2.º)

No ano seguinte, em 1964, é criado no Ministério da Educação Nacional o Instituto de Meios Áudio-Visuais de Ensino (I.M.A.V.E.), com o objetivo de «promover a utilização, a expansão e o aperfeiçoamento das técnicas áudio-visuais como meios auxiliares e de difusão do ensino e de elevação do nível cultural da população» (Decreto-lei n.º 46 135/1964, de 31 de dezembro, artigo 1.º); e, pelo decreto-lei n.º 46 136/1964, de 31 de dezembro, é criada no Ministério da Educação Nacional, na dependência do I.M.A.V.E., uma telescola, destinada à realização de cursos de radiodifusão e televisão escolares. O I.M.A.V.E. ficava assim com a finalidade de escolarizar um maior número de cidadãos através da rádio e da televisão.

Como consequência das transformações provocadas pelos diplomas legislativos de Galvão Teles no sistema de ensino, é criado em 1965, o Gabinete de Estudos e

Planeamento da Acção Educativa[23] (G.E.P.A.E.). No decreto-lei que lhe deu origem, pode ler-se: «O Ministério da Educação Nacional tem absoluta necessidade de um órgão que possa consagrar-se ao estudo permanente, sistemático, dos problemas de natureza educacional, em ordem a facilitar as decisões de fundo que o Ministro haja de tomar sobre a matéria».

[23] Criado pelo decreto-lei n.º 46 156, de 16 de janeiro de 1965, com a designação de Gabinete de Estudos e Planeamento da Acção Educativa, só em 1972 seria publicada a respetiva Lei Orgânica, pelo decreto-lei n.º 485, de 2 de dezembro, passando a designar-se Gabinete de Estudos e Planeamento (G.E.P.).

3. O *Compêndio de Matemática* de Sebastião e Silva

Ainda hoje considerados textos de referência para a atividade matemática, nomeadamente nos vários cadernos do Ministério da Educação referentes aos programas de matemática do ensino secundário, o *Compêndio de Matemática* e o *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática* foram textos redigidos por Sebastião e Silva que foram policopiados e distribuídos aos alunos e professores no âmbito de uma reforma do ensino da matemática que teve lugar nos anos 60 do século passado. De acordo com Ponte (2003, p. 5-6), foram materiais «escritos com grande elegância e erudição e revelavam uma posição equilibrada no que respeita a conteúdos, proporcionando o tratamento de novos temas sem derrapar para os extremismos formalistas».

Este terceiro capítulo começa por apresentar uma breve biografia do professor Sebastião e Silva, que, segundo Madalena Garcia[24] em Garcia (1982, p. 149), era «não só matemático insigne mas também, sem dúvida, um homem possuidor de amplo e brilhante espírito que conciliava, em equilíbrio raríssimo, profunda cultura especializada com vasta cultura humanista». Esta vasta cultura especializada e humanista aliada à divulgação da mesma pelo professor tornou possível a elaboração de uma síntese do seu pensamento relativamente às questões da educação e da pedagogia da matemática e que terão servido de base para a conceção e implementação da experiência pedagógica nos liceus portugueses pelo professor em colaboração com a O.C.D.E. e à semelhança do que havia acontecido noutros países. Segundo Yolanda Lima[25] (1997, p. 102), «das experiências

---

[24] Madalena Garcia licenciou-se em Matemática pela Universidade do Porto em 1956, com elevada classificação, tendo optado pelo ensino secundário por gosto e vocação. Tornou-se bastante conhecida pelo seu trabalho em prol do ensino da matemática e como colaboradora do Professor Sebastião e Silva. Ensinou gerações de alunos, participou na formação de novos professores e foi co-autora de diversos livros didáticos. (S.P.M., 2003)

[25] Yolanda Lima (1933-1999) licenciou-se em Matemática pela Faculdade de Ciências de Lisboa. Foi professora de Matemática e orientadora de estágios pedagógicos do ensino liceal e secundário em Portugal e autora de manuais escolares para estes níveis de ensino. Escreveu artigos e proferiu palestras sobre diversos assuntos relativos à matemática e ao seu ensino. Acedido em 20 de julho de 2013 em http://pt.wikipedia.org/wiki/Yolanda_Lima.

patrocinadas pela O.C.D.E., esta foi considerada a melhor e inspiradora das de outros países, nomeadamente Brasil e países árabes»; «Em vez de uma substituição da Matemática tradicional pela Matemática moderna, o que se verificou foi uma simbiose entre as duas», referem Ponte, Boavida, Graça e Abrantes (1997, p. 52).

A fechar este terceiro capítulo, apresenta-se uma análise geral dos vários volumes que compõem o *Compêndio de Matemática* e do *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática* e a relação que existiu entre esse manual e o ano propedêutico que vigorou em finais da década de 70 e início da década de 80 do século XX.

No guia para os professores em formação que acompanhou o texto-piloto, Sebastião e Silva desenvolveu mais uma vez as «ideias condutoras do seu pensamento, que bem esclarecem a sua atitude perante o ensino secundário. A coerência é perfeita». (Gil, 1982, p. 134)

3.1. Breve biografia de José Sebastião e Silva

Fig. 2– José Sebastião e Silva

José Sebastião e Silva nasceu em Mértola no dia 12 de dezembro de 1914. Concluiu o curso do Liceu em Évora, com a classificação de 19 valores. Em 1937, licenciou-se em Ciências Matemáticas com 17 valores, na Faculdade de Ciências de Lisboa onde também obteve o seu doutoramento, em 1949. Durante cinco anos, de 1937 a 1942, para subsistir, deu explicações individuais e aulas, mais ou menos esporádicas, em colégios particulares. Em 1942 foi contratado como segundo assistente da Faculdade de Ciências de Lisboa. (Guimarães, 1972)

Entre 1940 e 1942 foi bolseiro do Instituto de Alta Cultura em Portugal e de 1943 a 1946 foi bolseiro em Roma onde as suas contribuições científicas mais significativas foram no campo da Análise Funcional e sobretudo na teoria dos funcionais analíticos, na teoria das distribuições e no cálculo simbólico. Estes trabalhos científicos abriram novas linhas de investigação que foram seguidos por matemáticos internacionais de renome. Apesar de Roma não ter sido a sua primeira preferência, por se encontrar em guerra, o balanço da sua estadia na capital italiana revelar-se-ia muito profícuo: privou e trabalhou com Federigo Enriques, Guido Castelnuovo, Luigi Fantappié, Mauro Picone, Francesco Severi, entre outros. (Guimarães, 1972)

Durante quase dez anos, de 1951 a 1960, foi professor catedrático do Instituto Superior de Agronomia. Em 1960, foi nomeado, por convite, professor catedrático da Faculdade de Ciências de Lisboa, onde regeu disciplinas fundamentais de Análise Superior e História do Pensamento Matemático até ao final da sua vida.

Durante mais de 20 anos dirigiu o Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa, onde contribuiu para a formação de muitos investigadores e professores universitários. Foi sócio efetivo da Academia das Ciências de Lisboa, a partir de 1966, e membro da Comissão Portuguesa da União Matemática Internacional.

Coube a Sebastião e Silva um papel fundamental na racionalização e atualização do ensino da matemática em Portugal. No âmbito universitário deve-se-lhe, em particular, a renovação do ensino da Análise que teve profundos reflexos na formação de novos professores e investigadores. No ensino secundário, presidiu a «Comissão de Estudos para a Modernização do Ensino da Matemática no 3.º ciclo de Ciências dos Liceus Portugueses» tendo, nesse âmbito, concebido e orientado experiências pedagógicas, a partir de 1963, para as quais renovou programas e métodos de ensino, redigiu compêndios para alunos e docentes e realizou cursos especialmente orientados para a formação de professores.

Faleceu em Lisboa, no dia 25 de maio de 1972, vítima de cancro. Nas últimas semanas, e apesar dos sofrimentos morais e físicos que o atormentavam, dedicou-se a redigir com o entusiasmo de sempre a memória sobre a equação de Boltzmann, que ficou incompleta e que foi publicada postumamente.

3.2. O pensamento pedagógico de Sebastião e Silva

Sebastião e Silva é reconhecido, em Portugal e no estrangeiro, como um dos maiores vultos portugueses da matemática e do seu ensino, do século XX. Para além da sua grande capacidade crítica e criadora na investigação matemática, Sebastião e Silva tinha também muitas e enraizadas opiniões sobre o ensino da matemática tendo-se empenhado afincadamente na divulgação e propagação dessas ideias. Nesse sentido, trocou correspondência com pessoas igualmente prestigiadas, concedeu várias entrevistas, redigiu vários artigos para revistas, entre outros, e escreveu nos *Guias para a Utilização do Compêndio de Matemática* uma súmula das suas recomendações, às quais chamou – *Normas Gerais*, no primeiro volume, e *Considerações de Ordem Geral*, no segundo volume.

O entendimento que Sebastião e Silva tinha do ensino da matemática, traduzia-se numa visão globalizante capaz de compreender o que se passava desde o ensino primário ao ensino superior. Para o professor, a matemática era um meio de atingir a formação integral de um cidadão e não um conjunto de técnicas a dominar. (Silva, 1995)

Numa entrevista concedida ao Diário de Notícias, em 23 de janeiro de 1968, Sebastião e Silva afirma que «o que se pretende acima de tudo é levar o aluno a compreender o porquê dos processos matemáticos, em vez de lhe paralisar o espírito, automatizando-o desde logo». Considera ainda, de acordo com Garcia (1982, p. 149), que no ensino tradicional o aluno «é tratado, precisamente, como se fosse uma máquina, enquanto no ensino moderno se procura, por todos os meios, levá-lo a reflectir e a reencontrar por si as ideias fundamentais que estão na base da Matemática». Entendimento confirmado pelas palavras de Lima (1997, p. 108), em que relembra que «O Professor dizia que o ensino tradicional paralisava o espírito do aluno automatizando-o na execução árida de tarefas, antes de ele saber o que elas significam; enquanto no ensino moderno se procura por todos os meios levá-lo a reflectir e redescobrir por si as ideias fundamentais em que se baseia a Matemática».

No colóquio realizado no âmbito do Encontro Internacional de Matemática[26] em homenagem a José Sebastião e Silva, A. Franco de Oliveira também referiu «uma directriz essencial do projecto de modernização veiculado por José Sebastião e Silva: dar ao estudante uma visão do "porquê", a par do "como" se faz» (Oliveira, 1982, p. 162). Isto, porque – dizia o professor – «se quisermos que o ensino da matemática seja autenticamente vivo e fecundo, deveremos apresentar uma ciência que se faz e não uma ciência já feita». (Castelnuovo, 1982, p. 33)

[26] O Encontro Internacional de Matemática em homenagem a José Sebastião e Silva constou de duas partes: um simpósio sobre Análise Funcional e Equações Diferenciais e o colóquio «O Ensino da Matemática nos anos 80». O encontro foi promovido pela S.P.M. e decorreu nas instalações da Fundação Calouste Gulbenkian de 29 de março a 3 de abril de 1982. (S.P.M., 1982a e 1982b)

Acerca dos objetivos do ensino da matemática e da educação, Sebastião e Silva tinha ideias muito precisas:

> «A par da intuição e da imaginação criadora, há que desenvolver ao máximo no espírito dos alunos o poder de análise e o sentido crítico». (Silva, 1975d, p. 11)
>
> «*Os alunos não precisam, em geral, de ser investigadores, mas precisam de ter espírito de investigação*». (Silva, 1977, p. 111)
>
> «Um dos objectivos fundamentais da educação é, sem dúvida, criar no aluno *hábitos* e *automatismos úteis*, como, por exemplo, os automatismos de leitura, de escrita e de cálculo. Mas trata-se aí, manifestamente, de *meios*, não de *fins*». (Silva, 1977, p. 14)
>
> «Uma vez que a máquina vem substituir o homem progressivamente em trabalhos de rotina, não compete à escola produzir homens-máquinas mas, pelo contrário, formar *seres pensantes*, dotados de imaginação criadora e de capacidade de adaptação em grau cada vez mais elevado». Entrevista ao Diário de Notícias em 23 de janeiro de 1968.

E criticava o ensino tradicional:

> «O que é preciso é não confundir *cultura* com *erudição* e sobretudo com o *enciclopedismo desconexo*, imensa manta de retalhos mal cerzidos, que vão desde as guerras púnicas até ao sistema nervoso da mosca. É esse, a bem dizer, o tipo de cultura que tende a produzir o ensino tradicional, baseado num sistema de exames que só permite apreciar memorizações e automatismos superficiais, mais ou menos próximos do psitacismo». (Silva, 1977, p. 14)
>
> «Ensino vital de ideias, eis o que se impõe – em vez de exposição mecânica de matérias». (Silva, 1977, p. 12)

Sebastião e Silva entendia que o ensino da matemática deveria refletir tanto a evolução da própria matemática como as necessidades sociais e isso implicaria que novas áreas da matemática surgissem no ensino da disciplina. Num texto manuscrito, sem data, intitulado *Parecer sobre um projecto de programa de Matemática do futuro 1.º ano do Ensino Secundário*, citado em Silva (1995), o professor afirmava que a sua reforma do ensino da matemática incluía pela primeira vez em Portugal:

> «(…) os seguintes assuntos de grande importância (...): lógica matemática, teoria dos conjuntos, álgebra de Boole com aplicações a computadores, teoria das relações (e respectivos grafos), programação linear, estruturas de semi-grupo, anel e corpo, uso da régua de cálculo em associação com o cálculo logarítmico, cálculo de valores aproximados como base para uma introdução ao cálculo diferencial e integral aplicado a problemas concretos e com a referência à sua resolução por meio de computadores, elementos de cálculo das probabilidades e de estatística matemática, cálculo vectorial, espaços vectoriais e transformações geométricas baseadas no cálculo vectorial». (Silva, 1995)

Paralelamente evidenciava o papel fundamental dos métodos de ensino, assumindo como referência, Maria Montessori[27], uma das grandes figuras da pedagogia e, de acordo com (Ponte, 2003), George Pólya[28], um dos autores mais importantes no âmbito da didática da matemática:

> «A modernização do ensino da matemática terá de ser feita não só quanto a programas, mas também quanto a métodos de ensino. O professor deve abandonar, tanto quanto possível, o método expositivo tradicional, em que o papel dos alunos é quase cem por cento passivo, e procurar, pelo contrário, seguir o método activo, estabelecendo diálogo com os alunos e estimulando a imaginação destes, de modo a conduzi-los, sempre que possível, à redescoberta.» Norma Geral 1. (Silva, 1975d, p. 11)
>
> «Na educação das crianças e jovens deverá adoptar-se a atitude socrática sob a forma de métodos activos heurísticos em que a personalidade do mestre deve apagar-se o mais possível a fim de permitir que se afirme e realize a personalidade do discípulo. O método heurístico no ensino também é chamado método de redescoberta (o aluno descobre factos conhecidos que não conhece). [Heurístico vem de *heúreka*, exclamação atribuída a Arquimedes ao descobrir no banho o peso específico dos corpos. O ensino deve levar a tais exclamações por parte dos alunos! (…)].» (Silva, 2000, p. 17-18)
>
> «(…) a ordem lógica na apresentação dos assuntos não é, muitas vezes, a mais aconselhável do ponto de vista didáctico. Devemos, pelo contrário, procurar seguir um caminho *em ziguezague, de tentativa e erro, por aproximações sucessivas,* semelhante ao da investigação. Numa palavra, convém seguir, tanto quanto possível, o método *heurístico*.» (Silva, 1976, p. 9).
>
> «Um ensino das ciências, que não seja acompanhado de uma boa educação estética e que não fale à imaginação dos alunos, está condenado *a priori*, pela sua própria aridez, a afastar muitos dos melhores talentos.» (Silva, 1977, p. 124-125)
>
> «O professor não deve forçar a conclusão: deve deixá-la formar-se espontaneamente no espírito do aluno.» (Silva, 1975d)
>
> «Muito raramente se deve definir um conceito sem ter partido de exemplos concretos e, tanto quanto possível sugestivos. Se a preparação psicológica tiver sido bem conduzida, será muitas vezes o aluno quem acabará por definir espontaneamente o conceito, com ou sem ajuda do professor. *Em qualquer caso, este deverá encaminhar o aluno para o rigor de linguagem, que equivale a dizer, de pensamento*. Para isso, será de grande auxílio a introdução à lógica matemática, feita logo de início.» Norma Geral 3. (Silva, 1975d, p. 11)

---

[27] Maria Montessori (1870 - 1952) foi a primeira mulher italiana a formar-se em medicina. Foi uma grande pedagoga que criou o método montessori de aprendizagem, baseado num material de apoio manipulado pela criança. Expôs os princípios e a didática do seu método no livro *Pedagogia científica*. Acedido em 8 de agosto de 2013 em http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/hfe/sanderson/vida_e_obra_montessori.htm.

[28] George Pólya (1887-1985) foi um matemático húngaro que trabalhou nas áreas de probabilidade, análise, teoria dos números, geometria, combinatória e física matemática. Na didática da matemática, destacou-se na resolução de problemas. Em 1945 publicou um dos seus livros mais famosos, *How to solve it*. Seguiram-se-lhe, *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics* (1951) e *Matemathics and Plausible Reasoning* (1954) e *Mathematical Discovery* (1962-64). Acedido em 8 de agosto de 2013 em http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/polya/biografia.htm.

Evidenciava claramente que a intuição se deveria sobrepor às demonstrações mas não deixava de alertar para a importância destas:

> «Se não houver tempo - o que é bem provável - podem-se omitir as demonstrações. O que importa, por enquanto, são as intuições: essas de modo nenhum devem faltar, (...)» (Silva, 1977, p. 81)

> «Um ensino da matemática que atenda exclusivamente ao aspecto demonstrativo, desprezando as intuições, o método heurístico e as aplicações concretas, pode tornar-se altamente deformativo, em vez de formativo que pretende ser.» (Silva, 1977, p. 111)

> «(...) o ensino de qualquer assunto deve (...) começar pela *fase intuitiva*. Mas a *fase racional*, que se lhe segue, é igualmente indispensável. Especialmente em matemática, nenhum resultado pode merecer inteira confiança, enquanto não for sancionado pela *razão*, isto é, demonstrado logicamente. Por isso, se é muito importante estimular no aluno a intuição e a imaginação criadora, não menos importante é desenvolver nele o espírito crítico, o hábito da análise lógica e do raciocínio rigoroso.» (Silva, 1977, p. 175)

Não deixava também de criticar o excesso e tipo de exercícios dos métodos tradicionais, fazendo recomendações:

> «1) É preciso combater o excesso de exercícios que, como um cancro, acaba por destruir o que pode haver de nobre e vital no ensino.
> 2) É preciso evitar certos exercícios artificiosos ou complicados, especialmente em assuntos simples. (...)
> É mais proveitoso reflectir várias vezes sobre um mesmo exercício *que tenha interesse*, do que resolver vários exercícios diferentes, *que não tenham interesse nenhum*. (...)
> Entre os exercícios que podem ter mais interesse, figuram aqueles que se aplicam a *situações reais, concretas*.» (Silva, 1977, p. 11-12)

Sebastião e Silva dava uma grande importância ao estudo das aplicações da matemática a outras áreas científicas e à vida corrente:

> «A matemática não se reduz a ciência isolada platonicamente de tudo o resto. É também um instrumento ao serviço do homem nos mais variados ramos da ciência e da técnica. O professor deve sempre ter presente este facto e tentar estabelecer, sempre que possível, as conexões da matemática com outros domínios do pensamento, atendendo a que muitos dos seus alunos irão ser físicos, químicos, biólogos, geólogos, engenheiros, economistas, agrónomos ou médicos.» Norma geral 8. (Silva, 1975d, p. 12)

> «(…) o professor de matemática deve ser, primeiro que tudo, um *professor de matematização*, isto é, deve habituar o aluno a reduzir situações concretas a modelos matemáticos e, vice-versa, aplicar os esquemas lógicos da matemática a problemas concretos.» (Silva, 1977, p. 13)

> «Resolução e discussão de problemas concretos por meio de equações: Este assunto, como, dum modo geral tudo o que se refere a aplicações concretas da matemática, é da máxima importância, quer formativa, quer informativa. É principalmente a propósito de problemas concretos - e não em abstracto - que interessa fazer a discussão de equações ou sistemas de equações.» (Silva, 1975b, p. 135-136)

«A matemática não deve desprezar o concreto, a matemática deve estar ligada à realidade física em que o pensamento matemático mergulha as suas raízes. E é sobretudo a geometria que serve de modo natural para a ligação entre o mundo físico e a abstracção.» (Castelnuovo, 1982, p. 33)

Das suas ideias também se destaca o potencial que Sebastião e Silva já antevia na evolução tecnológica, com o uso de equipamento como computadores e máquinas de calcular, sublinhando o seu valioso contributo na estatística e na trigonometria:

«Na verdade, o uso dos computadores tem vindo a acentuar a importância do método experimental na investigação matemática, permitindo aperfeiçoar processos ou mesmo abrir caminhos inteiramente novos.» (Silva, 1977, p. 86)

«Haveria muitíssimo a lucrar em que o ensino destes assuntos [cálculo integral] fosse normalmente orientado a partir de centros de interesse (…) tanto quanto possível *laboratorial,* isto é, baseada no uso de computadores, existentes nas próprias escolas ou fora destas, em laboratórios de cálculo.» (Silva, 1977, p. 89)

«(…) com a expansão do uso dos computadores, será cada vez maior o número de pessoas que precisam de *saber pensar*, o que pressupõe, primeiro que tudo, *liberdade criadora do espírito*, como contrapartida do *predomínio da máquina em trabalhos de rotina.*» (Silva, 1977, p. 109)

«(…) os computadores e as máquinas de calcular têm o seu valor e o seu lugar no ensino da matemática e de modo algum substituem o ser pensante (...) Os cálculos exigidos pelos métodos estatísticos são geralmente muito laboriosos. Por esse facto, não será fácil nem aconselhável resolver nas aulas problemas numéricos de estatística, mesmo simples, sem o auxílio de máquinas de calcular.» (Silva, 1977, p. 109)

Sebastião e Silva entendia que uma das principais preocupações do professor de matemática deveria ser estimular nos seus alunos um sentimento estético, fazendo-os aperceberem-se da beleza de certas proposições e da elegância de certos raciocínios (Gil, 1982). Essa atitude está bem patente no exercício seguinte e no comentário que se lhe segue:

«Calcular a altura de uma torre por meio de medições efectuadas no solo (sem subir à torre).
Pede-se aqui algo que pode parecer impossível a uma pessoa que não tenha formação matemática. A beleza do assunto está precisamente nisto: o impossível torna-se possível por dedução matemática.» (Silva, 1977, p. 15)

Sebastião e Silva valorizava muito os aspetos da linguagem e acreditava que as dificuldades em matemática resultavam principalmente de deficiências na comunicação e na leitura o que poderia conduzir a uma má compreensão dos conceitos mais básicos:

«Não devemos esquecer que a matemática é, no fundo, um processo de formalização progressiva da linguagem comum.» (Silva, 1975d)

«A matemática, língua científica por excelência, está sujeita a uma evolução contínua que alarga cada vez mais o seu campo de acção… Há que insistir num sistema gradual de traduções e retroversões entre a linguagem matemática e a

> linguagem comum. Um dos objectivos principais é habituar o aluno, desde muito novo, a pôr problemas em equação.» (Lima, 1997, p. 106-107)

Por diversas vezes defendeu a necessidade de se dar a devida importância à lógica matemática, não deixando de alertar para os perigos do seu abuso:

> «A lógica matemática é um meio poderoso para habituar o aluno à clareza e ao rigor, tanto da linguagem como do pensamento.» (Silva, 1975d, p. 15)
>
> «É preciso não esquecer que o extremo rigor lógico, em vez de formativo, pode tornar-se *perigosamente deformador*, criando inibições por vezes insuperáveis – se não for precedido de uma motivação intuitivo-concreta e equilibrado com o referido processo de matematização.» (Silva, 1977, p. 13)

Sebastião e Silva dava também extrema importância à evolução histórica dos conceitos matemáticos que considerava ser de enorme valia para a formação dos alunos. O professor preconizava a:

> «(...) inserção das matérias no quadro duma cultura geral, que tempere e humanize o abstractismo inerente à matemática, procurando explicá-la como processo histórico (...)» (Silva & Paulo, 1963a)
>
> «A leitura deste número [parágrafo sobre grandezas comensuráveis e grandezas incomensuráveis] tem especial interesse para a cultura geral do aluno. O assunto aqui tratado liga-se directamente ao da NOTA HISTÓRICA, cuja leitura é igualmente recomendável, por idênticas razões.» (Silva & Paulo, 1963a)

Nesse sentido, incluiu nos seus livros inúmeras *Notas Históricas*, como acontece no *Compêndio de Álgebra*, escrito em colaboração com José Duarte da Silva Paulo, onde se podem encontrar referências históricas muito diversas que abrangem uma grande variedade de épocas, que vão desde os babilónios, passando pelo matemático português Pedro Nunes, até às calculadoras eletrónicas contemporâneas do referido compêndio. Segundo Silva (1995), o livro de *Geometria Analítica Plana* inicia-se com duas notas históricas. No *Compêndio de Matemática*, a introdução dos números complexos segue a evolução histórica com a discussão da fórmula de Tartaglia para as equações do 3.º grau e a referência à necessidade das *quantidades silvestres* de Bombelli para que a fórmula de Tartaglia forneça todas as raízes reais.

3.3. A experiência pedagógica nos liceus portugueses

A partir dos anos 50 do século XX, o rápido desenvolvimento da indústria e da economia conjuntamente com o novo mundo da automação, simultaneamente causa e efeito de novos progressos na investigação matemática, exigiam uma formação atualizada no que se referia a Lógica Matemática, Teoria dos Conjuntos, Álgebra de Boole, Álgebra e Análise lineares, Espaços de Hilbert, novas técnicas de cálculo numérico, etc. A matemática que estava a ser ensinada nas universidades da Europa diferia profundamente daquela que havia sido ensinada um quarto de século antes. Daí resultava a necessidade de remodelar os programas nas escolas secundárias e até nas primárias, tendo em vista não só a preparação para estudos universitários mas também para o desenvolvimento duma nova mentalidade que a informática começava a exigir com premência em qualquer ramo profissional ligado ao comércio, à indústria, aos serviços, etc. No entanto, em Portugal, para além de os conteúdos da disciplina de matemática estarem obsoletos, o seu ensino era demasiado insistente na rotina, na mecanização e na memorização. Esta descrição do contexto em que surgiu a experiência pedagógica foi feita, de acordo com Lima (1997), pelo próprio Sebastião e Silva em entrevista publicada pelo Diário de Notícias no dia 23 de janeiro de 1968 e numa carta enviada ao G.E.P.A.E. em junho de 1969.

Em 1962, José Sebastião e Silva tomou para si a iniciativa de realizar um curso na Faculdade de Ciências de Lisboa que tinha como objetivo principal a atualização de professores de liceu mas estava também aberto a qualquer aluno da instituição. O curso que funcionou durante todo o ano letivo de 1962/1963 denominou-se *Curso de Introdução à Matemática Moderna* e coroou-se de êxito: «mais de 150 professores foram sensibilizados para a necessidade de mudança pela clareza da exposição, pelas notas pedagógicas nelas inseridas, pelo interesse dos temas e pelo peso do prestígio e da autoridade do mestre». (Lima, 1997, p. 101)

Na sequência do interesse despoletado pelo curso, em julho de 1963, o ministério de Inocêncio Galvão Teles convidou José Sebastião e Silva para presidir a *Comissão de Estudos para a Modernização do Ensino da Matemática no 3.º Ciclo de Ciências dos Liceus Portugueses*. Esta comissão manteve-se em atividade até 1965 (Gil, 1982). Para além de Sebastião e Silva, faziam ainda parte desta comissão, três professores metodólogos dos liceus normais, Jaime Furtado Leote, do Liceu Pedro Nunes, em Lisboa, Manuel

Augusto da Silva, do Liceu D. João III, em Coimbra e António Augusto Lopes, do Liceu D. Manuel II, no Porto, e ainda, um inspetor de matemática do ensino liceal.

Em novembro de 1963, a delegação portuguesa, constituída por Jaime Furtado Leote, António Augusto Lopes e José Sebastião e Silva, apresentou no Simpósio de Atenas promovido pela O.C.D.E., um relatório sobre o progresso da reforma em Portugal. Ainda em dezembro desse ano, foi assinado o protocolo entre a O.C.D.E. e o ministério que previa a criação de turmas-piloto no 3.º ciclo dos liceus portugueses. (Matos, 1989; Lima, 1997). Nascia assim, o denominado Projecto Especial STP-4/SP da O.C.D.E. em colaboração com o Ministério da Educação Nacional.

Para a consecução deste projeto a comissão começou por delinear as seguintes quatro fases de atuação:

> «1 - Formar professores.
> 2 - Experimentar num grupo muito restrito de escolas.
> 3 - Afinar os textos após as primeiras experiências; alargar progressivamente o n.º de escolas e de professores formados.
> 4 - Apresentar programas de Matemática Moderna na TV para todo o público.»
>
> (Lima, 1997, p. 103)

No ano letivo de 1963/1964 funcionaram três turmas-piloto do 6.º ano, uma em cada liceu normal do país: Liceu Pedro Nunes, em Lisboa, Liceu D. João III, em Coimbra, e Liceu D. Manuel II, no Porto, regidas por elementos da comissão preparados e orientados pelo próprio Sebastião e Silva. (Lima, 1997)

De acordo com Lima (1997, p. 103), os textos que foram surgindo em fascículos e que eram policopiados e distribuídos aos alunos, «surpreenderam toda a gente, porque, para além dos conhecimentos científicos, revelavam excepcionais dotes pedagógicos, grande cultura humanística e sobretudo uma segurança de perspectivas e de modernidade só possível a quem está na crista da Ciência como investigador». Segundo Silva (1976, p. 10), «embora enquadrada nas recomendações gerais da O.C.D.E. […] a concepção destes textos é quase cem por cento original, como se pode verificar, confrontando-os com livros congéneres estrangeiros». Conforme refere Almeida Costa[29], em Esteves (2013, p. 84), «O

---

[29] António de Almeida Costa (n. 1931) licenciou-se em Ciências Matemáticas e Engenharia Geográfica pela Universidade de Coimbra e concluiu o curso de Ciências Pedagógicas. Foi professor metodólogo do ensino liceal (Liceu D. João III, em Coimbra), reitor do Liceu Normal D. Manuel II, no Porto, diretor do Gabinete de Estudos e Planeamento (G.E.P.), Inspetor-geral de Educação, autor de manuais escolares, para além de várias outras funções de natureza política, técnica-política e técnica. (Esteves, 2013)

trabalho científico e pedagógico era da exclusiva responsabilidade de Sebastião e Silva». Aos restantes membros da comissão cabia controlar a adequação ao nível etário e ao número de aulas, para além de propor exercícios e exemplos.

Em agosto de 1964, realiza-se no então Liceu de Oeiras[30] o primeiro curso para atualização de professores e que foi regido pelos membros da comissão. No ano letivo 1964/1965, a experiência foi ampliada para 11 turmas-piloto do 6.º ano e 3 do 7.º ano, com programas já ajustados pela experiência levada a cabo no ano anterior e pelas conclusões do Simpósio em Atenas. No ano letivo seguinte, 1965/1966, houve nova ampliação da experiência para 19 turmas-piloto do 6.º ano e 11 do 7.º ano espalhadas pelos liceus de Lisboa, Porto, Coimbra, Braga e Leiria. Em setembro de 1965, realiza-se o segundo curso para atualização de professores em que os monitores iniciais foram sendo substituídos pelos anteriores formandos (Lima, 1997; S.P.M., 2003). Este procedimento continuou durante os anos seguintes e 5 anos após o início da experiência existiam, apenas do 6.º ano, mais de 60 turmas-piloto em Portugal continental, 6 em Luanda, 2 em Lourenço Marques (atual Maputo), 1 em S. Tomé e 3 em Colégios. A docência nas turmas experimentais no país era acompanhada no terreno por um inspetor orientador (S.P.M., 2003).

Com vista ao aperfeiçoamento constante dos textos-piloto e a ajustamentos da experiência, o Professor Sebastião e Silva reunia-se, no Liceu Pedro Nunes, de 15 em 15 dias com os professores regentes da experiência, pedindo dúvidas e sugestões. Durante os primeiros anos, ia assistir a muitas aulas e incluía nos seus textos enunciados de exercícios imaginados pelos alunos (Lima, 1997; S.P.M., 2003).

A quarta fase de atuação para a implementação do Projecto Especial STP-4/SP, vulgarmente designada de «Matemáticas Modernas», segundo Gil (1982), concretizou-se na «TV EDUCATIVA». Todas as semanas, num programa promovido pelo I.M.A.V.E., Sebastião e Silva nos primeiros tempos e mais tarde Almeida Costa até abril de 1974, ministraram conhecimentos de Matemática Moderna destinados aos professores de matemática, em geral, e aos estagiários, em particular. O programa, com duração de 23 minutos, era transmitido às 19 horas, quase sempre em direto. (Lima, 1997; Esteves, 2013)

---

[30] Em homenagem ao Professor, o Liceu de Oeiras tem a designação atual de Escola Secundária Sebastião e Silva.

Nas entrevistas que concedeu ao Diário de Notícias em 1966 e 1968 e numa carta enviada ao G.E.P.A.E. em 1969, Sebastião e Silva apresentou uma descrição da experiência mostrando-se satisfeito com a sua evolução:

> «Não nos é ainda possível atingir o grau de desenvolvimento de alguns projectos no que se refere a computadores, programação, estatística, equações diferenciais e aplicações à física...
>
> Mas a par de assuntos da Matemática clássica que continuam a ser ensinados, em geral com mais eficiência, foram introduzidos nos liceus portugueses, pela primeira vez, os seguintes temas de grande importância: Lógica Matemática, Teoria dos Conjuntos, Álgebras de Boole com aplicações a computadores, Teoria das relações e respectivos grafos, Programação Linear; Estruturas de grupo, anel e corpo, uso da régua de cálculo a par do cálculo logarítmico, Cálculo diferencial e integral aplicados a problemas concretos, Cálculo das probabilidades, Estatística matemática, Cálculo vectorial, Espaços vectoriais, Transformações geométricas...
>
> ... A organização das turmas-piloto tem sido baseada em convites dirigidos aos encarregados de educação... Isso tem permitido efectuar uma avaliação espontânea da experiência... não só esses convites são geralmente aceites, num regime de plena liberdade de escolha, como ainda surgem numerosos pedidos para incluir alunos não convidados...» (Lima, 1997, p. 105)

Neste excerto, Sebastião e Silva faz uma referência aos novos temas lecionados e ainda ao modo de seleção dos alunos para integrar as turmas-piloto. Nesta fase experimental, as turmas eram formadas por não mais de 25 alunos que eram escolhidos e convidados de entre aqueles que apresentavam as melhores classificações na disciplina de matemática. Almeida Costa relata, em Esteves (2013, p. 85), que a sua turma-piloto, no Porto, era formada por alunos por si escolhidos e eram «alunos excecionais, uma turma brilhante»; quanto à seleção dos professores, acrescenta, que eram convidados, pela Inspecção Geral da Educação, os mais importantes e mais credenciados dos liceus do país. Yolanda Lima e Madalena Garcia foram duas dessas professoras convidadas.

Yolanda Lima foi regente do programa de 6.º ano entre 1967 e 1974. Convém realçar que durante a experiência pedagógica o número de horas semanais destinados à disciplina de matemática foi elevado para 6. As figuras 3 e 4 ilustram o organigrama estrutural dos programas para o 6.º e 7.º anos, tal como a professora as regeu, onde se evidenciam os conteúdos abordados e o regime de bifurcação indicados por Sebastião e Silva que se justifica do seguinte modo: «propõe-se que os assuntos dos dois volumes do 7.º ano sejam tratados em *paralelo*, no regime de bifurcação, com três horas por semana destinadas a um dos volumes, e três horas por semana ao outro. O objectivo é evitar que os assuntos tratados num dos volumes sejam relegados em bloco para a última parte do ano, em que a receptividade dos alunos é sempre menor, por razões óbvias». (Silva, 1977, p. 15)

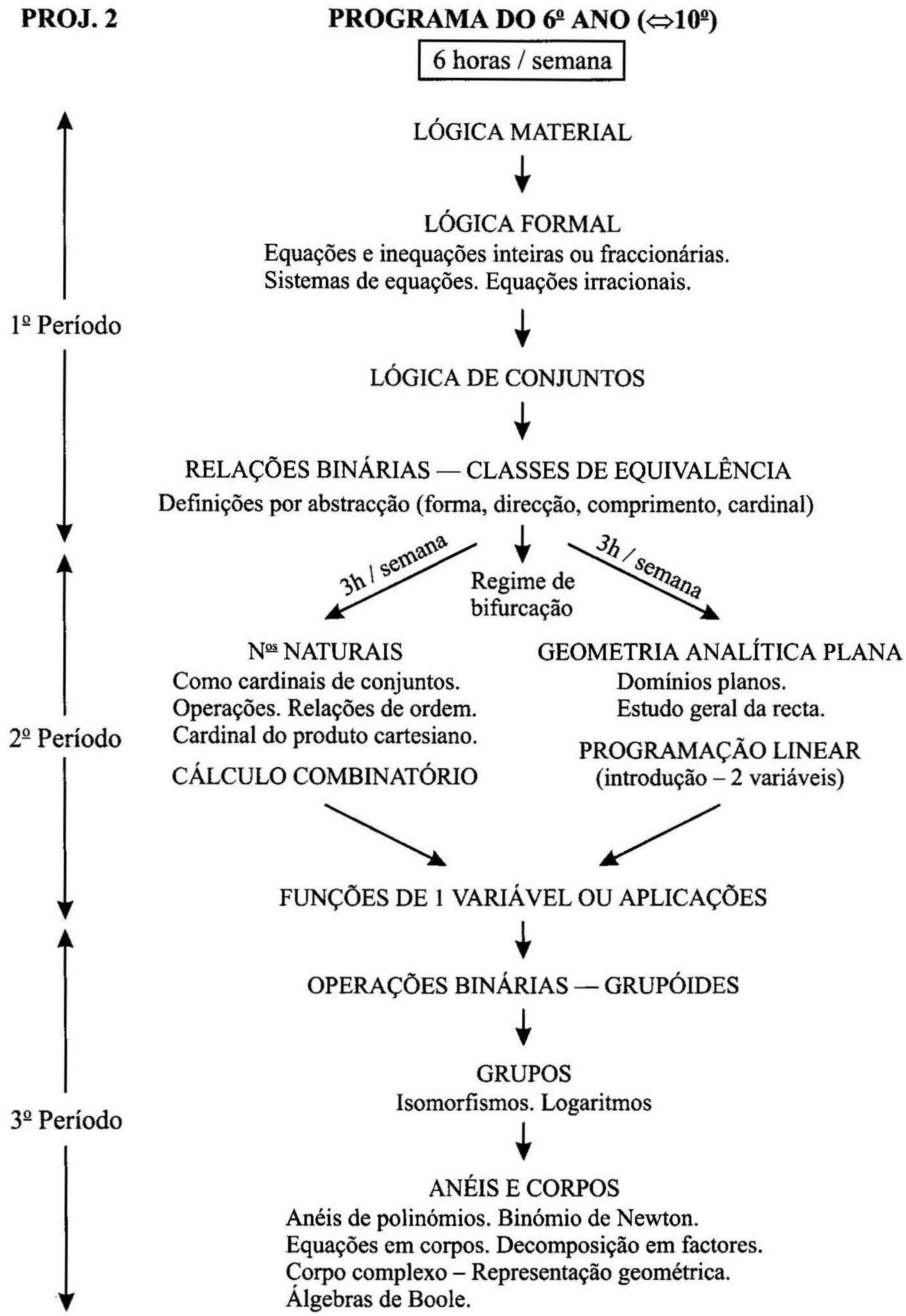


Fig. 3– Organigrama estrutural para o 6.º ano. (Lima, 1997)

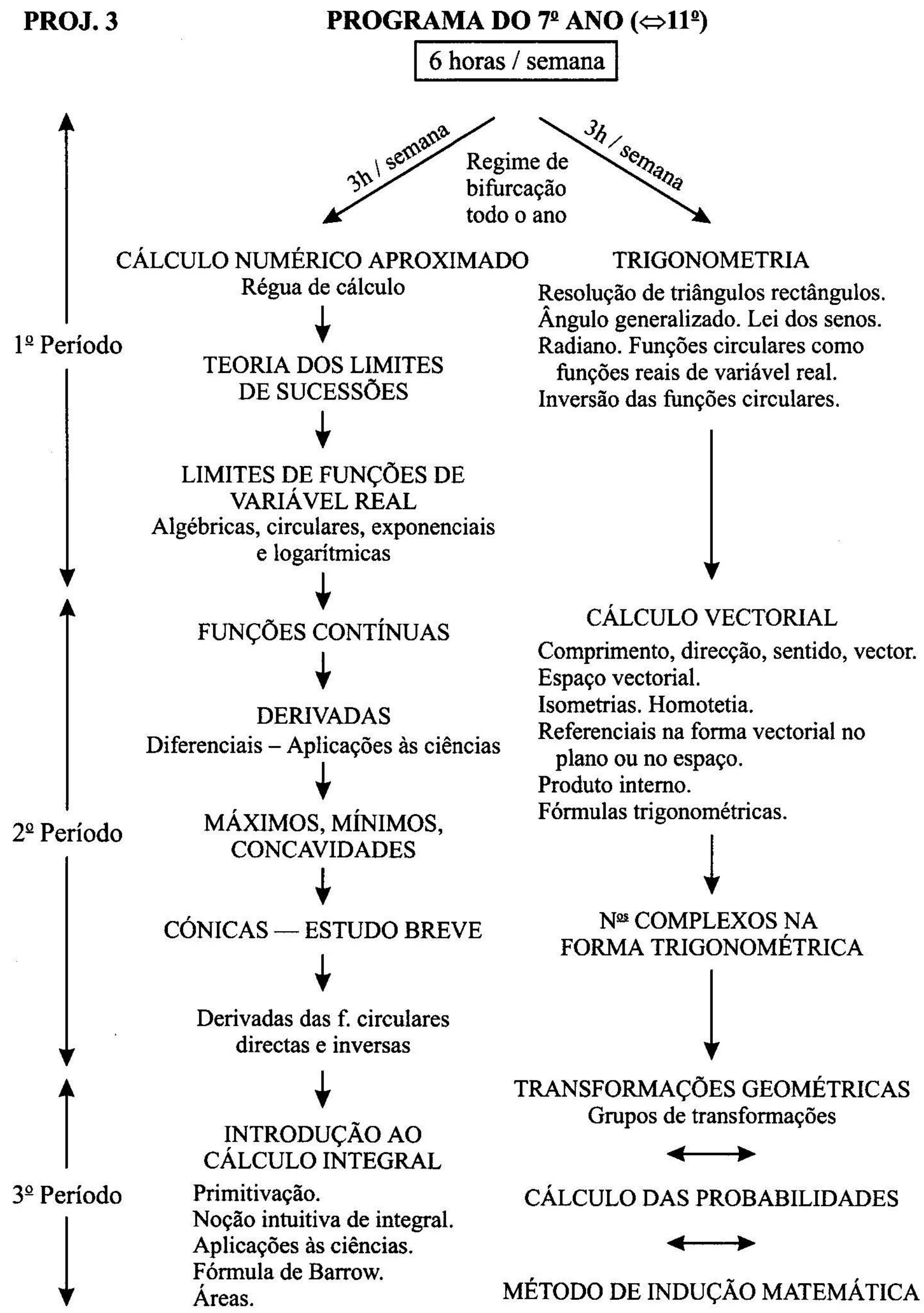


Fig. 4– Organigrama estrutural para o 7.º ano. (Lima, 1997)

De acordo com as palavras de Yolanda Lima, «A orientação adoptada em Portugal situava-se entre a orientação muito abstracta seguida na Bélgica e a mais pragmática seguida em Inglaterra.» (Lima, 1997, p. 105)

Da experiência pedagógica portuguesa resultou, segundo Gil (1982, p. 134), a «dicotomia de Matemáticas Modernas e Matemáticas Clássicas nos liceus, na segunda metade dos anos sessenta, e em professores especialistas de Matemáticas Modernas e não especialistas. Outro resultado foi a experiência de 1967, que consistiu na introdução em todos os programas dos liceus das noções da chamada Matemática Moderna.»

Madalena Garcia frequentou em Oeiras, em 1966, um curso para professores, orientado pelo Professor Sebastião e Silva. No ano letivo imediato lecionou uma turma-piloto e, logo a seguir, orientou vários cursos de férias para professores, visando a ampliação do número de turmas experimentais. Para tomar conhecimento das experiências a decorrer no estrangeiro, fez um breve estágio no Centro Belga de Pedagogia da Matemática e contactou pessoalmente a professora Emma Castelnuovo, em Itália. (S.P.M., 2003)

A experiência pedagógica realizada em Portugal provocou muitas manifestações de apreço por parte da comunidade estrangeira. Segundo Lima (1997, p. 104), foram feitos «mais de 100 pedidos de manuais e guias e inúmeros convites para cursos e conferências chegaram da Itália, Bélgica, França, Espanha, Brasil, entre outros». Madalena Garcia regeu no Brasil, a pedido de Sebastião e Silva, um curso de férias de um mês para professores brasileiros interessados na experiência a decorrer em Portugal; bolseiros brasileiros vieram também assistir a aulas em Portugal; e Sebastião e Silva foi convidado a colaborar no projeto de modernização do ensino da matemática nos países árabes. (Lima, 1997; S.P.M., 2003)

Para Yolanda Lima (1997, p. 99), esta foi «a melhor experiência pedagógica feita em Portugal no âmbito do ensino liceal da Matemática, não só pela qualidade ímpar de quem a liderou, como pelos cuidados de que foi rodeada a sua implementação». Almeida Costa declara em entrevista concedida em 28 de março de 2012 a Esteves (2013, p. 84), que «O Professor Sebastião e Silva era a alma daquele projeto». E, de acordo com o Gabinete de Estudos e Planeamento do Ministério da Educação e Cultura, «Um dos aspectos mais importantes dessa intervenção revolucionária foi precisamente a redacção deste *Compêndio*». (Silva, 1975a, p. 7-8). É justamente uma descrição geral deste *Compêndio de Matemática* que se apresenta nas páginas que se seguem.

3.4. O *Compêndio de Matemática*

> *Com raras excepções, os mais admiráveis textos científicos de conteúdo pouco especializado (obras de divulgação ou compêndios destinados ao ensino secundário) foram escritos por grandes cientistas, que não hesitaram em afastar-se temporariamente dos domínios de investigação em que se celebrizaram para poderem contribuir, de forma mais directa e imediata, para o progresso cultural da sociedade em que viviam. Para além da excepcional cultura humanística e dos dotes pedagógicos e até literários, que muitas dessas obras revelam, todas se distinguem por uma elevação de perspectiva só possível a autores que sejam, eles próprios, criadores de Ciência.*
>
> *Neste quadro deve ser situado o* Compêndio de Matemática, *de José Sebastião e Silva, cuja publicação agora se inicia.*
>
> (Silva, 1975a, p. 7)

É desta forma elogiosa que começa a nota de apresentação do *Compêndio de Matemática*, redigida pelo Gabinete de Estudos e Planeamento do Ministério da Educação e Cultura, em 1975, e na qual se pode perceber o destaque e reconhecimento oficiais que foram dados ao trabalho desenvolvido por Sebastião e Silva. Mais adiante pode ler-se:

> *Assim, este* Compêndio de Matemática *é uma obra de valor científico e pedagógico muito invulgar, certamente destinada a desempenhar por longo tempo um papel fundamental na formação, não apenas de muitos professores e estudantes das nossas escolas secundárias e até superiores, mas também das pessoas que aspiram a atingir, como autodidactas, uma compreensão clara das grandes ideias que estão na base das Ciências Exactas dos nossos dias, mesmo que não pretendam prosseguir estudos superiores relacionados com essas Ciências.*
>
> (Silva, 1975a, p. 8-9)

O *Compêndio de Matemática* é constituído por três volumes, sendo que o primeiro se apresenta dividido em dois tomos, e é acompanhado por dois guias. O primeiro volume destinava-se aos alunos do 6.º ano (15 ou 16 anos de idade) e o segundo e terceiro volumes aos alunos do 7.º ano (16 ou 17 anos de idade). Estes volumes contêm introduções a diversos domínios matemáticos fundamentais, tais como Lógica, Teoria dos conjuntos, Álgebra, Análise, Probabilidades e Cálculo numérico aproximado e tinham como público-alvo tanto os alunos como os professores. Segundo Sebastião e Silva:

> O Compêndio de Matemática *é destinado a servir, não só como auxiliar de estudo para o aluno, mas ainda como complemento de formação para o professor. Daí o desenvolvimento e o pormenor com que foi escrito. Cabe pois ao critério e ao bom senso do professor dosear a densidade do ensino com base no* Compêndio.
>
> (Silva, 1975d, p. 9)

> *Aparentemente dedicados em primeiro lugar aos professores, estes «guias» foram redigidos por forma a serem de igual valor para os estudantes (aos quais, aliás, foram sempre facultados no decurso das experiências-piloto realizadas nos nossos liceus).*
>
> (Silva, 1975a, p. 8)

O compêndio e o guia têm dimensões 15,5 cm por 23,5 cm. No seu interior todo o texto é escrito a negro. A capa é mole, tem fundo branco e uma faixa horizontal que é azul no *Compêndio de Matemática* e é verde no *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática* e na qual surge o título escrito a branco e em maiúsculas. Acima desta faixa horizontal aparece o nome do autor escrito a negro e abaixo identifica-se o número do volume e tomo (quando aplicável), o curso a que se destinava – Curso Complementar do Ensino Secundário – e ainda, ao fundo, as palavras «Edição GEP» e «Lisboa», para a publicação de 1975 e 1976. Na publicação de 1978, abaixo da faixa horizontal apenas se identifica o número do volume e tomo (quando aplicável) e o curso a que se destinava – Ano Propedêutico. Esta faixa horizontal prolonga-se pela lombada e pela contracapa dos livros.

Cada livro do compêndio está organizado em capítulos identificados com numeração romana e em que o tema surge escrito em letras maiúsculas e a negrito. Os capítulos apresentam-se divididos em pontos, identificados com numeração árabe, seguidos da identificação do subtema escrito a negrito e do respetivo desenvolvimento escrito a negro. De acordo com as palavras do Gabinete de Estudos e Planeamento, nesta obra «os temas tratados são excepcionalmente desenvolvidos, ultrapassando largamente o âmbito do que era tradicional no ensino secundário» (Silva, 1975a, p. 8).

Os dois volumes do guia estão organizados em capítulos, identificados com numeração romana, seguido do tema escrito em letras maiúsculas; por sua vez, os capítulos apresentam-se divididos em pontos, identificados com numeração árabe, seguido do texto propriamente dito. Conforme refere Silva (1975a, p. 8), nestes guias «concentra-se um manancial de ideias sobre pedagogia, história e filosofia da Matemática, além de complementos importantes ao conteúdo dos textos» do *Compêndio de Matemática*.

O primeiro tomo do primeiro volume do *Compêndio de Matemática* (figura 5) é constituído por 221 páginas e começa com a já referida nota de apresentação redigida pelo Gabinete de Estudos e Planeamento do Ministério da Educação e Cultura, na qual faz um elogio ao professor Sebastião e Silva e à sua obra, em particular ao próprio compêndio, e explicita as razões que tornaram «imperiosa uma divulgação mais ampla desta obra, que nunca fora impressa.» (Silva, 1975a, p. 9).

Fig. 5– Capa do *Compêndio de Matemática (1.º vol., 1.º tomo)*

Os temas estudados no primeiro tomo do primeiro volume são:

Capítulo I. Introdução à lógica matemática;

Capítulo II. A lógica em termos de conjuntos;

Capítulo III. Números inteiros e cálculo combinatório;

Capítulo IV. Funções de uma variável.

O segundo tomo do primeiro volume do *Compêndio de Matemática* (figura 6) é constituído por 303 páginas nas quais surgem, sem qualquer tipo de introdução, os capítulos seguintes aos do primeiro tomo. No final dos textos e antes do índice, surgem várias Tábuas de Mortalidade e uma Tábua da Distribuição do χ^2 de Pearson.

Os temas estudados no segundo tomo do primeiro volume são:

Capítulo V. Operações binárias. Grupoides;

Capítulo VI. Anéis e corpos. Números complexos. Álgebras de Boole;

Capítulo VII. Introdução à estatística e ao cálculo das probabilidades.

Fig. 6– Capa do *Compêndio de Matemática (1.º vol., 2.º tomo)*

O segundo volume do *Compêndio de Matemática* (figura 7) é constituído por 430 páginas e começa com uma nota prévia e uma advertência do autor. Na nota prévia, Sebastião e Silva expõe 4 razões que, ora centradas no professor ora no aluno, justificam a inclusão, neste 2.º volume, de matérias que não eram obrigatórias nos cursos-piloto. Segundo Silva (1976, p. 7): «Ao professor interessa adquirir conhecimentos para além dos que precisa de ministrar, a fim de que possa ter ideias mais precisas sobre as finalidades do seu ensino.»; (…) «Ao professor convém um texto orgânico, onde as novas noções apareçam devidamente concatenadas e que lhe permita economizar aquilo de que tanto carece: tempo.»; «Há que estimular ao máximo os alunos talentosos, facultando-lhes a leitura fácil de certos assuntos para além do programa.»; e, por último, o autor manifesta a sua preocupação com os alunos que pretendam vir a frequentar as cadeiras de Matemáticas Gerais e Álgebra Linear, no ensino superior, e que assim ficarão a possuir «elementos de informação e esclarecimento, que lhes permitirão superar mais facilmente o fosso que se tem vindo a cavar entre ensino liceal e ensino universitário, quer em *conteúdo científico*, quer em *forma de ensino*.» (Silva, 1976, p. 8).

Fig. 7– Capa do *Compêndio de Matemática (2.º vol.)*

Na advertência, Sebastião e Silva informa que o *Compêndio* do 7.º ano se compõe de dois volumes e justifica que esta divisão se deveu a imposições da própria experiência pedagógica. Porém, no seu entender, essa divisão ter-se-á revelado vantajosa dado que a diferente índole dos assuntos terá tornado aconselhável que fossem «tratados, tanto quanto possível, em *paralelo* e não *em série* […] a fim de se obter o melhor aproveitamento possível.» (Silva, 1976, p. 9). Em seguida reforça o que já havia mencionado nas normas gerais, acerca da ordem lógica da apresentação dos assuntos:

> **a ordem lógica na apresentação dos assuntos não é, muitas vezes, a mais aconselhável do ponto de vista didáctico. Devemos, pelo contrário, procurar seguir um caminho *em ziguezague, de tentativa e erro, por aproximações sucessivas,* semelhante ao da investigação. Numa palavra, convém seguir, tanto quanto possível, o método *heurístico*.**
>
> (Silva, 1976, p. 9)

Em seguida o autor reflete sobre o método analítico versus método sintético, salienta que os textos que compõem o *Compêndio de Matemática* são genuinamente seus e termina com um agradecimento à Divisão de Mecânica Aplicada do Laboratório Nacional de Engenharia Civil.

No final do livro aparecem dois aditamentos e uma nota final; o primeiro aditamento é intitulado «Cálculo de valores aproximados» e o segundo «Nova orientação no estudo do cálculo de valores aproximados».

Os temas estudados no segundo volume são:

Capítulo I. Introdução ao cálculo diferencial;

Capítulo II. Introdução ao cálculo integral;

Capítulo III. Teoria dedutiva dos números naturais.

Por fim, o terceiro volume do *Compêndio de Matemática* (figura 8) é constituído por 225 páginas onde o autor, sem notas ou advertências prévias, desenvolve os seguintes temas:

Capítulo I. Introdução ao cálculo vetorial;

Capítulo II. Números complexos em forma trigonométrica;

Capítulo III. Transformações afins e aplicações lineares;

Fig. 8– Capa do *Compêndio de Matemática (3.º vol.)*

Capítulo IV. Representação analítica de aplicações lineares e transformações afins;

Capítulo V. Álgebras de aplicações lineares e álgebras de matrizes.

O *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática (1.º Volume)* (figura 9) é constituído por 145 páginas e começa com uma advertência prévia em que o autor identifica os destinatários dos seus textos, seguida das já referidas normas gerais de Sebastião e Silva, norteadoras do processo da experiência pedagógica. Todos os capítulos são observações aos capítulos do primeiro volume do *Compêndio* à exceção do terceiro que é sobre um assunto que não foi abordado no mesmo – Geometria Analítica. São estes os capítulos:

Fig. 9– Capa do *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática (1.º vol.)*

I – Observações ao Capítulo I;

II – Observações ao Capítulo II;

III – Introdução à geometria analítica (assunto não tratado no *Compêndio*);

IV – Observações ao Capítulo III;

V – Observações ao Capítulo IV;

VI – Observações ao Capítulo V;

VII – Observações ao Capítulo VI;

VIII – Observações ao Capítulo VII.

O *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática (2.º e 3.º Volumes)* (figura 10) é constituído por 203 páginas e começa com a repetição da advertência prévia do guia anterior; em seguida, o autor explana, em 7 páginas, várias considerações de ordem geral realçando que já foram focados alguns pontos no guia anterior que importa salientar sob novos aspetos. Aqui, apenas dois capítulos são observações aos capítulos do *Compêndio,* os restantes são dedicados ao desenvolvimento de diversos temas, que são os seguintes:

Fig. 10– Capa do *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática (2.º vol.)*

I – Introdução à trigonometria;

II – Observações acerca do capítulo I do 2.º volume;

III – Observações ao Capítulo II do 2.º volume;

IV – Probabilidades, estatística e ciência experimental;

V – Indução experimental;

VI – Racionalização matemática do contínuo.

3.5. O *Compêndio de Matemática* e o Ano Propedêutico

No ano letivo de 1977/1978 foi instituído a nível nacional, pelo decreto-lei n.º 491/77 de 23 de novembro, o Ano Propedêutico do ensino superior oficial, que funcionou na dependência da Direcção-Geral do Ensino Superior e que veio substituir o Serviço Cívico Estudantil. Este Ano Propedêutico, que vigorou durante 3 anos, foi criado devido à necessidade de se prepararem técnicos a um nível cada vez mais desenvolvido e capazes de acompanhar a evolução crescente da ciência e da técnica. No Ano Propedêutico era ministrado o ensino de 5 disciplinas, algumas delas introdutórias, ou preliminares, às matérias dos planos de estudo dos vários cursos do ensino superior e outras consideradas importantes para a formação dos candidatos ao ensino superior. A escolha deste conjunto de 5 disciplinas era feita de acordo com o curso ou cursos superiores a que os alunos se desejassem candidatar. Este ano de transição foi apoiado num sistema de ensino à distância por via televisiva, visando preparar o ingresso no ensino superior limitado pela fixação de *numerus clausus*. Esta solução de recurso, apoiada num tipo de ensino claramente inadequado à faixa etária dos alunos a que se destinava, veio contribuir para agravar desajustamentos sociais de índole vária, gerando uma situação a que foi necessário pôr fim, culminando na implementação, no ano letivo 1980/1981, do 12.º ano de escolaridade, através do decreto-lei n.º 240/80, de 19 de julho, este a funcionar no âmbito da Direcção Geral do Ensino Secundário.

Segundo Matos (1989), em 1977 é lançado o programa de matemática para o Ano Propedêutico que incluía cónicas, análise infinitesimal, estruturas algébricas, números complexos e vetores e transformações geométricas. O autor acrescenta que em 1980 o programa já tinha sofrido alterações e incluía duas grandes áreas: Álgebra (estruturas algébricas, números reais e complexos, espaço linear, matrizes, determinantes) e Análise (sucessões, séries, funções, derivação, teoremas de Rolle, Lagrange, Cauchy e Taylor, cónicas, primitivação e integração).

No Ano Propedêutico, o manual escolar adotado para a disciplina de matemática foi, à exceção do 1.º tomo do 1.º volume, o *Compêndio de Matemática* de José Sebastião e Silva cujos textos o professor começou a redigir em 1963 para a experiência pedagógica nos liceus portugueses, como já foi referido no subcapítulo 3.3. deste estudo. A única alteração nestes volumes observa-se na capa: onde antes se lia *Curso Complementar do Ensino Secundário*, lê-se agora, *Ano Propedêutico*, como se pode verificar na figura 11. Salienta-se o facto de o manual escolar ser agora destinado a alunos um ano mais velhos e portanto com maior maturidade intelectual.

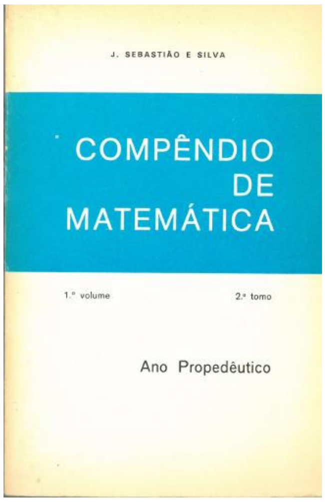


Fig. 11- Capa do *Compêndio de Matemática* (1.º vol., 2.º tomo) – Ano Propedêutico

4. As equações no *Compêndio de Matemática*

Neste capítulo pretende-se fazer um estudo acerca das equações dos 1.º, 2.º e 3.º graus numa perspetiva histórica. Para isso, começar-se-á com uma curta descrição da abordagem dada a este tipo de equações por Pedro Nunes (1502 - 1578) que foi uma notável figura portuguesa, tendo sido um dos, ou talvez, o maior algebrista do seu tempo. Também Sebastião e Silva se refere frequentemente a Pedro Nunes na sua obra.

Segue-se uma análise dos programas de matemática relativamente às equações dos 1.º, 2.º e 3.º graus, desde a segunda metade do século XX até aos nossos dias. Num passado não muito distante, os programas de uma disciplina eram essencialmente uma listagem de temas a tratar pelo professor. Depois, começaram a conter objetivos, recomendações metodológicas e sugestões para a avaliação. No início dos anos 70, foram elaborados novos programas para todos os níveis de ensino de acordo com o espírito da matemática moderna. José Sebastião e Silva já não participou neste processo. Segundo Ponte (2003, p. 7), nesta generalização a todos os níveis de ensino evidenciou-se o que era «abstracto e formal, sem perder de vista o cálculo. As aplicações da Matemática desapareceram por completo. Tudo o que remetia para o desenvolvimento da intuição, base da compreensão das ideias matemáticas, foi relegado para segundo plano». Na opinião de Ponte (2003, p. 7) «os programas de Matemática portugueses dos anos 70 e 80 são uma curiosa mistura de Matemática formalista no estilo moderno com Matemática computacional no estilo tradicional».

Após a análise cuidada dos programas segue-se a análise daqueles que são, segundo Ponte, Boavida, Graça e Abrantes (1997, p. 70), «uma interpretação (por vezes extremamente livre) do currículo oficial». Segue-se, pois, a análise dos manuais escolares.

Atualmente, o manual escolar é um objeto banal e bastante familiar mas é também, segundo Choppin (1980), «um instrumento pedagógico com uma longa tradição e é inseparável, tanto na sua elaboração como no uso que dele se faz, das estruturas, dos métodos e das condições de ensino do seu tempo».

A análise do manual escolar tem, portanto, uma importância destacada no contexto da pesquisa histórica em didática, em geral, e em didática da matemática, em particular, uma vez que o manual reflete a atividade numa sala de aula. Segundo Choppin (1980), o manual escolar «impõe uma distribuição e hierarquia dos conhecimentos e ajuda a moldar o andaime intelectual de alunos e professores, é um instrumento de poder, uma vez que contribui para a uniformidade linguística da disciplina, o nivelamento cultural e a disseminação das ideias dominantes».

Neste capítulo, será feita uma análise do *Compêndio de Matemática*, em geral, e dos pontos sobre as equações dos 1.º, 2.º e 3.º graus, em particular. Será feita uma apresentação do manual seguida de uma descrição das páginas relativas ao assunto em estudo. A análise considerará três dimensões que serão identificadas por *organização e grafismo, aspetos didáticos* e *aspetos fenomenológicos.* Em seguida serão analisados vários manuais escolares, começando com aqueles que foram contemporâneos do *Compêndio* até aos da atualidade, com o objetivo de se investigar a didática na abordagem das equações dos 1.º, 2.º e 3.º graus e de se avaliar a influência do *Compêndio* nos manuais escolares que lhe sucederam.

Os livros didáticos escritos por Sebastião e Silva primam pelo rigor matemático, pela linguagem precisa e constituíram um fator de modernização do ensino da matemática. A qualidade dos manuais escolares, no seu aspeto científico e também no seu aspeto pedagógico, é fundamental para que haja um bom ensino. Eles são um instrumento básico do professor e uma fonte indispensável de aquisição de conhecimentos para o estudante. Em homenagem à memória do matemático que marcou uma época em Portugal, a Sociedade Portuguesa de Matemática decidiu em 1997, com o apoio financeiro da Fundação para a Ciência e a Tecnologia, instituir o Prémio Sebastião e Silva para galardoar manuais destinados ao ensino básico e secundário.

4.1. As equações na obra de Pedro Nunes

As origens da álgebra situam-se na formalização e sistematização de certas técnicas de resolução de problemas que eram usadas já na Antiguidade – no Egito, Babilónia, China e Índia. Por exemplo, o célebre papiro de Rhind/Amhes é essencialmente um documento matemático com a resolução de diversos problemas, que assume já um marcado cunho algébrico. Pouco a pouco, vai-se definindo o conceito de equação e a álgebra começa a ser entendida como o estudo da resolução de equações. Um autor da Antiguidade, por alguns considerado o fundador da álgebra, foi Diofanto (séc. III), que desenvolveu diversos métodos para a resolução de equações e sistemas de equações num estilo de linguagem conhecido como *sincopado*. Os enunciados dos problemas, que tinham começado por ser expressos em linguagem natural, passam a incluir pequenas abreviaturas. O termo «álgebra» só surge alguns séculos mais tarde, num trabalho de Al-Khwarizmi (790 - 840), para designar a operação de «transposição de termos», essencial na resolução de uma equação. Lentamente, vai-se avançando na resolução de equações incompletas e completas dos 1.º e 2.º graus, embora usando formas de representação dificilmente reconhecíveis pelo leitor moderno. De equações de grau superior ao 2.º, apenas se sabem resolver casos particulares. (Ponte, Branco & Matos, 2009)

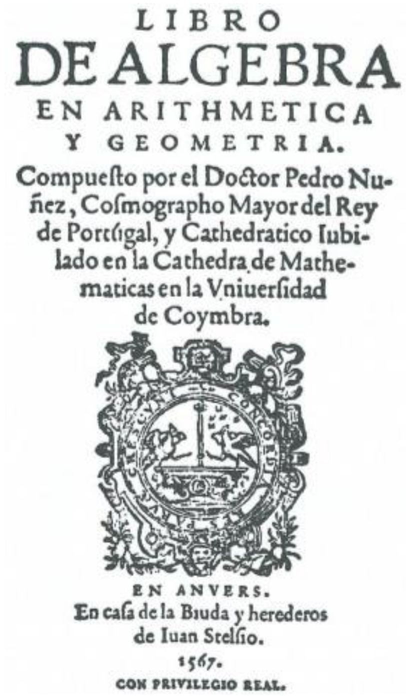
No século XVI, com o génio de François Viète (1540-1603), dá-se uma profunda renovação da álgebra, entrando-se numa nova etapa, a da álgebra *simbólica*. Nessa mesma época, dão-se grandes progressos na resolução de equações. É Scipione del Ferro (1465-1526) quem primeiro resolve a equação geral do 3.º grau. No entanto, del Ferro não publica os seus resultados, e a mesma descoberta é feita igualmente por Tartaglia (1500-1557) e publicada por Cardano (1501-1576), na sua *Ars Magna*. Finalmente, a equação geral do 4.º grau é resolvida por Ferrari (1522-1565). O sucesso destes matemáticos italianos marca um momento muito importante na história da matemática, pois, é a primeira vez que a ciência moderna ultrapassa claramente os êxitos da Antiguidade. (Ponte, Branco & Matos, 2009)

No quase meio século que decorreu entre a *Ars Magna* (1545), de Cardano, e a *Artem Analyticam Isagoge* (1591), de Viète, nenhum outro tratado ascendeu a tão alto nível como o *Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria* de Pedro Nunes. (Struik, 1997)

Pedro Nunes nasceu em Alcácer do Sal, em 1502, e faleceu em Coimbra, em 1578. Bacharel em medicina pela Universidade portuguesa, então instalada em Lisboa, interessou-se também pela matemática e, apesar de ter sido chamado a desempenhar o cargo de Cosmógrafo do Reino, no reinado de D. João III, conseguiu acumular estas funções com as de professor de matemática na Universidade, já de novo mudada para

Coimbra, desde 1544 até 1562, ano em que se jubilou. (Estrada, Sá, Queiró, Silva & Costa, 2000)

Pedro Nunes foi o português quinhentista que produziu a obra mais notável em vários campos da matemática[31]. No que respeita à álgebra, deixou-nos aquele que foi o último livro que publicou, o *Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria*, cuja edição em castelhano surgiu em 1567, apesar de já se encontrar composto cerca de 30 anos antes em língua portuguesa, como o autor refere na dedicatória ao cardeal D. Henrique. Aconteceu, no entanto, que no intervalo de tempo que decorreu entre a elaboração do livro e a sua divulgação, a resolução da equação cúbica foi descoberta em Itália. Pedro Nunes refere-se a este facto num aditamento ao tratado. (Teixeira, 1934; Estrada, Sá, Queiró, Silva & Costa, 2000; Nunes, 2010).


LIBRO
DE ALGEBRA
EN ARITHMETICA
Y GEOMETRIA.
Compueſto por el Doctor Pedro Nuñez, Coſmographo Mayor del Rey de Portugal, y Cathedratico Iubilado en la Cathedra de Mathematicas en la Vniuerſidad de Coymbra.

EN ANVERS.
En caſa de la Biuda y herederos de Iuan Stelſio.
1567.
CON PRIVILEGIO REAL.

Fig. 12 - Frontispício do *Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria*[32]

O livro encontra-se dividido em 3 partes principais, respetivamente, com 31, 124 e 251 páginas, e um aditamento com 21 páginas. A primeira parte principal é composta por 6 capítulos que têm como objetivo o conhecimento das equações dos 1.º e 2.º graus a uma

[31] Pedro Nunes foi autor, entre outras, das seguintes obras: *Tratado sobre certas dúvidas da Navegação* (1537); *Tratado em Defensão da Carta da Marear* (1537); *De arte adque ratione navigandi* (1566 e 1573); *De Crepusculis* (1542); *De erratis Orontii Finaei* (1546); *Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria* (1567). (Struik, 1997)

[32] Segundo (Nunes, 2010), existiu uma única edição do *Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria* mas com 2 frontispícios distintos.

incógnita e o estabelecimento e demonstração das respetivas regras de resolução. A segunda parte principal subdivide-se em 3 partes, nas quais o autor se ocupa sucessivamente do cálculo algébrico, a que chama «algoritmo das dignidades», da radiciação e das proporções. Na terceira parte principal, o autor trata dos assuntos, que no seu entender, constituem o objeto da álgebra: os métodos de resolução das equações, desenvolvendo muito aquilo que referiu no início da obra e ocupa-se das aplicações destas doutrinas à resolução de numerosos problemas de aritmética e de geometria. No posfácio, Pedro Nunes refere-se a vários livros contemporâneos de álgebra e procede a uma análise crítica da então recente fórmula de Tartaglia para as equações do 3.º grau aplicando-a a dois exemplos. (Nunes, 2010)

Começa assim a obra que Gomes Teixeira (1934) considerou uma «jóia científica»:

> «En esta Arte de Algebra el fin que se pretende, es manifestar la quantidad ignota. El medio de que vsamos para alcançar este fin, es ygualdad. Las principales quãtidades a q̃ por discursos demõstratiuos procuramos esta ygualdad, dandoles o quitandoles quanto cõuiene, como quien pone en balança, son tres: Numero, Cosa, Censo». (Nunes, 2010, p. 29)

Para aquele que «foi o maior nome da Matemática portuguesa do século XVI e mesmo de sempre», de acordo com Estrada, Sá, Queiró, Silva e Costa (2000, p. 590), a essência da álgebra era a doutrina das equações. Relativamente a estas, colocou-se no ponto de vista aritmético, considerando, como os algebristas italianos, somente equações com coeficientes da incógnita numérica, em vez de considerar equações com coeficientes literais. (Teixeira, 1934)

Nas equações, Pedro Nunes empregou para designar a incógnita, a notação *.co. (cosa)*, para designar a sua segunda potência, a notação *.ce. (censo)* e para designar a terceira potência, a notação *.cu. (cubo)*. Para representar os números, escreveu-os entre dois pontos, isto é, usou a notação *.7.* para designar o número 7. Além destas notações, Pedro Nunes empregou letras para representar as operações adição, subtração e extração da raiz. Assim, designou a adição por $\tilde{p}$, abreviatura de *plus* (mais), a subtração por $\tilde{m}$ (abreviatura de *minus*), para designar a raiz quadrada empregou a letra R e para a raiz cúbica, 3R. Para designar igualdades não empregou sinal algum. (Teixeira, 1934; Silva & Paulo, 1963b; Nunes, 2010)

É verdade que Pedro Nunes ficou preso às demonstrações geométricas e à linguagem sincopada, mas na sua obra, «esta linguagem atingiu a sua máxima perfeição» (Teixeira, 1934).

Pedro Nunes abre o seu livro com as regras para a resolução das equações dos 1.º e 2.º graus, expressas nesta linguagem e demonstradas geometricamente. Para estas demonstrações recorre não só às construções dadas por Euclides, mas ainda a outras novas, inventadas por ele próprio. Apesar disso, segundo Teixeira (1934), não se encontra na álgebra de Pedro Nunes invenções fundamentais, mas ela «é perfeita na forma, clara e metódica na exposição, rigorosa nos raciocínios, original em algumas demonstrações e nos métodos empregados para a resolução dos numerosos problemas que encerra».

Pedro Nunes recorre à geometria, como os matemáticos helenos, para demonstrar as suas proposições e o rigor das suas demonstrações permite perceber a influência exercida no seu espírito pelos clássicos da antiga Grécia. Este cuidado com o rigor levou-o a não admitir as quantidades negativas como soluções dos problemas, ficando muito atrás dos indianos, que as aceitaram e interpretaram. Deve todavia notar-se que admitiu no seu livro, como facto inegável, mas inexplicável, que a raiz quadrada de uma expressão algébrica tem em álgebra dois valores com sinais contrários, mas acrescentou que não sabia explicar o motivo disto. Sentia que havia algo na álgebra que não tinha correspondente nem na aritmética nem na geometria, mas não a sabia explicar. Era a noção de número negativo, por ele repudiada, que se apresentava na ciência daqueles tempos de um modo muito obscuro, que só começou a esclarecer-se mais tarde, no século XVII, quando se encontrou, para tal número, uma correspondência em geometria, e só se esclareceu completamente no século XIX. (Teixeira, 1934)

Para o padre belga H. Bosmans[33], da Companhia de Jesus, a primeira parte principal do *Libro de Algebra*, juntamente com o posfácio, é suficiente para fazer de Pedro Nunes um mestre. Ainda segundo o mesmo autor, Pedro Nunes indicou uma fórmula para a resolução da equação de 3.º grau mais prática do que a de Tartaglia, mas infelizmente não conseguiu encontrar uma regra geral para determinar com toda a certeza o cubo a subtrair aos dois membros, já que a regra apresentada por Pedro Nunes exigia o conhecimento prévio de uma raiz da equação. (Silva, 2005)

[33] Henri Bosmans foi o autor de «Sur le *Libro de algebra* de Pedro Nuñez», *Bibliotheca Mathematica*, 8 (1907-8) 154-169 e «L'Algèbre de Pedro Nuñez», *Annaes Scientificos da Academia Polythecnica do Porto*, 3 (1908) 222-271. (Nunes, 2010)

Pode-se afirmar que nenhum matemático quinhentista se aproximou tanto como Pedro Nunes da álgebra moderna. No *Libro de Algebra* há algumas demonstrações feitas em termos de tão grande perfeição que, se as notações – só mais tarde introduzidas por Viète – permitissem conservar, através dos raciocínios, as letras que representam as grandezas de que se parte, serviriam ainda como textos da atualidade, no que respeita ao cálculo, e só presa à geometria no que respeita às demonstrações. Um estilo inconfundível na precisão e sem paralelo nos autores em que se inspirou e nas obras dos seus contemporâneos constituem justamente um título de glória do notável matemático português. A álgebra de Pedro Nunes foi minuciosamente estudada por Bosmans, que considerou o matemático português um dos algebristas mais eminentes do século XVI. Assim se refere Bosmans acerca das demonstrações de Pedro Nunes: «Ni chez Stifel, ni chez Cardan, on ne trouverait pas une page écrite dans ce style». (Teixeira, 1934; Nunes, 2010)

4.2. As equações nos Programas de Matemática desde a 2.ª metade do séc. XX

Neste subcapítulo pretende-se fazer, numa perspetiva histórica, um estudo centrado na abordagem das equações nos programas de matemática no período de tempo que vai desde a época em que surgiu o *Compêndio de Matemática* até à atualidade. Como já foi referido anteriormente, as equações em estudo serão as do 1.º, 2.º e 3.º graus a uma incógnita.

De acordo com o disposto na alínea a), do artigo 3.º, da lei n.º 47/2006, de 28 de agosto, define-se programa como sendo o:

> «conjunto de orientações curriculares, sujeitas a aprovação nos termos da lei, específicas para uma dada disciplina ou área curricular disciplinar, definidoras de um percurso para alcançar um conjunto de aprendizagens e de competências definidas no currículo nacional do ensino básico ou no currículo nacional do ensino secundário;»

Com a reforma do ensino liceal de 1947, o 2.º ciclo passou a ser constituído por três anos (3.º, 4.º e 5.º anos[34]) e o 3.º ciclo por dois (6.º e 7.º anos[35]), Tal como já foi explicitado no segundo capítulo deste trabalho, sendo que o número semanal de aulas da disciplina de matemática era de 3 e 4, respetivamente.

O diploma legislativo que aprovou os programas do ensino liceal vigentes nos anos 60 do século passado foi o decreto n.º 39 807, de 7 de setembro de 1954. Estes programas mantiveram-se em vigor até ao início dos anos 70.

O plano de estudos da disciplina de matemática para os três anos do 2.º ciclo estava estruturado em dois temas aglutinadores: álgebra e geometria, acrescentando-se que «o valor formativo da geometria supera, e muito, o da álgebra». Esta opção era justificada com o facto de que «o rigor e o sentido lógico das demonstrações de geometria elementar dão aos alunos hábitos de precisão de ideias e de linguagem, e permitem-lhes aplicar com êxito o raciocínio lógico-dedutivo não só a outras ciências como a questões da vida real».

Refere-se que o estudo da álgebra será orientado de modo que os alunos compreendam que este ramo da matemática é uma generalização da aritmética; e que, a aquisição da técnica do cálculo e a resolução de problemas constituem a base do ensino da álgebra elementar. A técnica do cálculo é considerada indispensável para o prosseguimento de estudo e como estímulo da atenção; e a resolução de problemas é considerada fundamental, não apenas como aplicação dessa técnica de cálculo, mas também porque se constitui como uma preocupação formativa que orienta o programa. Para além disto, o programa impõe que em todos os anos do 2.º ciclo os estudos se iniciem com a álgebra.

O plano de estudos para os dois anos do 3.º ciclo apresentava-se estruturado em três temas aglutinadores: para o 6.º ano, álgebra, trigonometria e aritmética racional, e para o 7.º ano, álgebra, trigonometria e geometria. Para este ciclo, o programa considera que o estudo da matemática deve constituir para o aluno «uma ginástica intelectual que lhe permita raciocinar com precisão e clareza, tanto no campo científico como na vida prática» de modo a poder iniciar com confiança os estudos superiores, na posse de um determinado número de princípios e teorias. Assim sendo, o programa define que «um dos tempos semanais será destinado a aula prática». Sugere-se, ainda, que se faça uso da história da matemática dentro da sala de aula: «Os factos da história da matemática relacionados com

[34] Os 3.º, 4.º e 5.º anos do ensino liceal correspondem, respetivamente, aos atuais 7.º, 8.º e 9.º anos de escolaridade.
[35] Os 6.º e 7.º anos do ensino liceal correspondem, respetivamente, aos atuais 10.º e 11.º anos de escolaridade.

os assuntos a estudar, quando adaptados à mentalidade dos alunos, constituem poderoso auxiliar para a boa compreensão de certas questões e, por vezes, também um incitamento ao trabalho».

O programa apresenta, também, recomendações claras acerca dos livros para o ensino. Assim, para o 2.º ciclo, refere que, tanto para o tema álgebra como para o de geometria, deverá existir apenas um compêndio destinado aos 3.º, 4.º e 5.º anos. Em cada capítulo os compêndios «deverão apresentar exercícios de aplicação, dispostos segundo ordem crescente de dificuldade, com as respectivas respostas» e o aspeto gráfico, principalmente o do compêndio de geometria, deverá merecer especial atenção. Para o 3.º ciclo, o programa lembra que os compêndios deverão inserir notas biográficas dos matemáticos que tenham sido referidos no desenvolvimento do programa e que também deve ser indicada uma pequena bibliografia de autores nacionais ou estrangeiros para os alunos consultarem.

No que concerne às equações, estas marcam presença nos programas dos 2.º e 3.º ciclos, em todos os anos, à exceção do 6.º.

A abordagem das equações do 1.º grau é feita nos 3.º, 4.º e 7.º anos com diferentes níveis de aprofundamento. No 3.º ano, o programa refere a resolução algébrica e gráfica deste tipo de equações com os princípios de equivalência a serem apenas enunciados e verificados perante exemplos numéricos; acrescenta, ainda, que o estudo das equações deverá ser iniciado pela apresentação e consequente resolução, de problemas muito simples. No 4.º ano, o programa volta a referir a presença destas equações sem acrescentar outra informação. No 7.º ano, o programa refere noções gerais e princípios de equivalência das equações, a sua resolução algébrica e gráfica, bem como a sua discussão.

As equações do 2.º grau surgem nos 5.º e 7.º anos, também com diferentes níveis de aprofundamento. No 5.º ano, o programa refere a resolução algébrica deste tipo de equações, cujo estudo deverá ser iniciado de modo análogo ao das equações do 1.º grau, ou seja, partindo de problemas simples. Acrescenta-se que os exemplos se devem limitar aos casos de raízes reais. Para o 7.º ano, o programa refere a resolução algébrica e gráfica das equações, bem como a sua discussão, salientando que as equações se limitam a «equações de coeficientes reais» não se incluindo a resolução de equações exponenciais.

Não há, neste programa de 1954, qualquer referência às equações do 3.º grau.

A partir do início dos anos 70 deu-se início a um período de generalização dos programas de matemática moderna aos alunos de todos os níveis de ensino, sendo para isso «elaborados novos programas e novos manuais escolares. Foram os programas dessa época, com pequenos reajustes no período pós-25 de Abril, que acabaram por vigorar até 1991». (Ponte, Boavida, Graça e Abrantes, 1997, p. 52)

Em 1972, surge o Programa de Matemática para o novo 1.º ano[36], após o 1.º Ciclo Preparatório do Ensino Secundário, destinado a ser ensaiado em alguns estabelecimentos de ensino, a partir de outubro desse ano. Dado tratar-se de um programa experimental, a sua análise não se enquadra no âmbito do presente trabalho.

Em 1973, são publicados no Diário do Governo[37], os programas de matemática para o curso complementar dos liceus, ou seja, para os novos 4.º e 5.º anos[38]. Estes programas inserem-se «na linha de renovação do ensino da Matemática que, com eles [programas de 1972], começou a ser definida»; também se informa que «o programa do 4.º ano (antigo 6.º) entrará em vigor no ano lectivo 1973/74 e o do 5.º ano (antigo 7.ºano) no ano lectivo seguinte.»

Nas considerações didáticas gerais que se apresentam, nota-se uma forte influência do pensamento pedagógico do professor Sebastião e Silva no que respeita à crítica ao método tradicional e sua progressiva substituição pelo método moderno de ensino, ao tipo de exercícios, à ligação da matemática ao concreto e ao real, às demonstrações dos teoremas e à necessidade do uso do diálogo permanente entre aluno e professor para a construção do conhecimento:

> «(…) progressivamente, *a pedagogia expositiva* cede o lugar a *uma pedagogia dinâmica*, enquadrada, como é a vida moderna, entre duas constantes (*comunicação* e *acção*).
>
> (…) *ao aluno cabe o direito e a obrigação de fazer a sua lição*, não apenas o de *receber a lição*.
>
> (…) a indispensabilidade de um clima novo na aula: novo por dever dar prioridade absoluta à capacidade de expressão e aos níveis de acção do aluno (observação e análise, experimentação, abstracção, dedução, utilização de conhecimentos anteriores);

---

[36] O novo 1.º ano corresponde ao antigo 3.º ano do ensino liceal e ao atual 7.º ano de escolaridade.
[37] Diário do Governo n.º 149, de 27 de junho de 1973, II Série.
[38] Os novos 4.º e 5.º anos correspondem aos antigos 6.º e 7.º anos do ensino liceal e aos atuais 10.º e 11.º anos de escolaridade, respetivamente.

> (…) a definição de uma heurística que não seja conducente à simples imitação do mestre é o caminho que fomenta o desenvolvimento do poder de análise e o sentido crítico dos alunos;
>
> (…) as demonstrações são ponto alto para desenvolver a capacidade de iniciativa dos alunos e oportunidade de conhecerem a alegria de construir e descobrir; cada aluno deve ser livre para tentar *a sua demonstração* de uma dada proposição.
>
> (…) [dar] preferência a exercícios simples, para esclarecimento dos conceitos, e a exercícios concretos e reais, com vista às aplicações». (Diário do Governo n.º 149, de 27 de junho de 1973, II Série)

As rubricas apresentadas no programa são as seguintes, por ano:

4.º ano: 1 – Introdução à lógica matemática; 2 – Relações; 3 – Introdução à geometria analítica plana; 4 – Funções; 5 – Grupoides; 6 – Cálculo combinatório;

5.º ano: 1 – Cálculo numérico aproximado; 2 – Introdução à análise infinitesimal; 3 – Anéis e corpos; 4 – Estudo do conjunto dos números naturais; 5 – Números complexos; 6 – Vetores e transformações geométricas.

Relativamente às equações, estas não se constituem como objeto de estudo propriamente dito, mas sim, como apoio a outros assuntos. Assim, no 4.º ano apenas se refere na rubrica 1 – Introdução à lógica matemática, que o estudo desta deverá ser aproveitado para rever e ampliar os conhecimentos sobre as equações, e, na rubrica 4 – Funções, refere-se a discussão de equações quadráticas aquando do estudo das funções quadráticas. No 5.º ano, não há qualquer menção ao estudo das equações do 1.º ou do 2.º graus.

Neste programa de 1973, não estava previsto o estudo das equações do 3.º grau.

Tal como é referido no preâmbulo, este era um «programa de transição, sujeito, em futuro próximo a necessário e indispensável ajustamento no respeitante à selecção, ordenação e extensão das rubricas apresentadas». Por conseguinte, em 1974, o Ministério da Educação e Cultura lança um novo programa, em 35 páginas, destinado, agora, a todos os anos do ensino liceal: *Matemática. Programa para o ano lectivo 1974/1975*[39]. O ensino liceal é agora constituído pelo curso geral (1.º, 2.º e 3.º anos[40]) e o curso complementar (1.º e 2.º anos[41]).

[39] Em 1974 e pela primeira vez, o programa foi publicado em livro/volume próprio. Até então, os programas foram publicados no Diário do Governo.

[40] Os novos 1.º, 2.º e 3.º anos do curso geral correspondem aos atuais 7.º, 8.º e 9.º anos de escolaridade, respetivamente.

[41] Os novos 1.º e 2.º anos do curso complementar correspondem aos atuais 10.º e 11.º anos de escolaridade, respetivamente.

O esquema programático para o curso geral prevê os seguintes temas[42], por ano:

1.º ano: 1 – Números racionais relativos; 2 – Equações; 3 – Relações binárias; 4 – Aplicações ou funções; 5 – Elementos de geometria plana.

2.º ano: 1 – Monómios e polinómios; 2 – Trata de: Potências; 3 – Trata de: Raiz quadrada de um número. Teorema de Pitágoras; 4 – Trata de: Números irracionais; 5 – Conjunto dos números reais; 6 – Produto de um número real por um vetor; 7 – Homotetia. Semelhança.

3.º ano: 1 – Questões de linguagem; 2 – Trata de: Radicais; 3 – Trata de: Função exponencial e função logarítmica de base 2; 4 – Circunferência. Introdução à trigonometria; 5 – Introdução ao estudo da geometria euclidiana; 6 – Transformações espaciais; 7 – Sólidos geométricos; 8 – Áreas e volumes.

Para vigorarem no ano letivo de 1974/1975, relativamente aos dois últimos anos dos liceus, são publicados dois programas: um relativo à *Matemática do Curso Complementar* e o outro relativo à *Matemática Clássica do Curso Complementar*. O primeiro, relativo à matemática moderna, é praticamente igual ao publicado em 1973 – mas onde não consta nenhuma das considerações didáticas gerais que tinham o forte cunho do professor Sebastião e Silva – e o segundo é considerado pelo próprio programa, na sua página 30, como «muito mais simples do que o anterior», no qual se observa, tal como é apontado, eliminação de conteúdos, redução do número de demonstrações a exigir e uma disposição diferente dos temas.

Os temas estudados na matemática clássica são os seguintes[43], por ano:

1.º ano: 1 – Trata de: os números reais; 2 – Trata de: funções.

2.º ano: 1 – Números complexos; 2 – Polinómios; 3 – Frações racionais; 4 – Análise combinatória. Binómio de Newton; 5 – Funções exponencial e logarítmica. Uso das tábuas; 6 – Distância de dois pontos (dedução da fórmula). Cónicas; 7 – Trata de: fórmulas e funções trigonométricas; 8 – A axiomática de Peano; a Indução Matemática.

A abordagem das equações do 1.º grau é feita nos 1.º e 3.º anos do curso geral e no 1.º ano do curso complementar com ambas as matemáticas, moderna e clássica.

---

[42] A expressão «Trata de:» pretende informar o leitor que, no programa, estes pontos não têm um título definido.

[43] A expressão «Trata de:» pretende informar o leitor que, no programa, estes pontos não têm um título definido.

No 1.º ano do curso geral, as equações numéricas do 1.º grau a uma incógnita são o tema de estudo de um dos pontos do programa. Nele, prevê-se a introdução intuitiva deste tipo de equações a partir de problemas elementares, sendo que alguns deles podem ser apresentados sob a forma de «jogos de pensar em números». Prevê-se também a resolução de equações em casos simples, em que se aplicam as propriedades das operações, bem como as definições da diferença e do quociente de dois números (em equações da forma $a+x=b$ e $ax=b$, esta última com a $\neq$ 0). O programa refere que as regras para a resolução de equações devam surgir de forma induzida a partir dos exemplos apresentados e recomenda que se proceda a uma introdução gradual, sem exigência de definições, da terminologia adequada: equação, incógnita, membros e termos de uma equação. A redução de termos semelhantes deverá ser abordada usando as propriedades comutativa da adição e distributiva. Recomenda-se para que, neste momento, não se faça referência ao grau de uma equação.

No 3.º ano do curso geral, as equações do 1.º grau servem de apoio ao estudo do primeiro tema, questões de linguagem, quando se faz uso das equações para se estudar a equivalência de condições, devendo-se, nesse sentido, proceder à mera enunciação, sem demonstração, dos princípios de equivalência das equações.

Como já foi referido, o 1.º ano do curso complementar divide-se em dois ramos: um com a matemática moderna e o outro com a matemática clássica, sendo que o programa do primeiro é igual ao do programa de 1973, sobre o qual já foi feito, neste trabalho, o estudo relativo à presença de equações tanto do 1.º como do 2.º grau. No que concerne ao ramo da matemática clássica, apenas se menciona a resolução e discussão de equações do 1.º grau a uma incógnita, imediatamente a seguir ao estudo do gráfico da função linear, inserido no estudo das funções. Acrescenta-se numa nota, que este estudo deve ser acompanhado da demonstração dos princípios de equivalência das equações.

A abordagem das equações do 2.º grau é feita nos 2.º e no 3.º anos do curso geral e no 1.º ano do curso complementar com matemática moderna (igual ao programa de 1973). No 2.º ano do curso geral, apenas se faz alusão ao estudo das equações numéricas da forma $x^2=k$, integrado no estudo do ponto 5 – Conjunto dos números reais. No 3.º ano do curso geral, prevê-se a resolução sucessiva de equações numéricas dos tipos: $x^2+bx=0$, $x^2-a=0$ e $x^2+bx+c=0$, com o objetivo de se chegar à formula resolvente. Aliás, recomenda-se que a resolução das equações seja feita usando tanto a decomposição do trinómio como a fórmula resolvente.

Não há, neste programa de 1974/1975, qualquer referência às equações do 3.º grau.

Nas décadas de 70 e 80 do século passado, o sistema de ensino português foi alvo de reestruturações. Entre outras alterações, o ensino não universitário passou a estar organizado em 12 anos de escolaridade que constituem o Ensino Básico e o Ensino Secundário. O primeiro compreende os 1.º, 2.º e 3.º ciclos que vão desde o 1.º até ao 9.º ano de escolaridade, destinado a alunos com idades desde os 6 até aos 14 anos. O segundo é formado por 3 anos – 10.º, 11.º e 12.º anos – e destina-se a alunos dos 15 aos 17 anos de idade.

Em 1991, o Ministério da Educação, pelo seu Departamento da Educação Básica, publica o novo *Programa de Matemática* para o 3.º ciclo do ensino básico em dois volumes: *Organização Curricular e Programas – volume I* e *Plano de Organização do Ensino - Aprendizagem – volume II*.

Segundo Ponte (2003), ao contrário do que se passou com os programas do ensino secundário, a introdução dos programas de matemática do ensino básico (1.º, 2.º e 3.º ciclos), de 1991, decorreu «sem grandes sobressaltos».

Neste documento definem-se os objetivos gerais para o ensino da matemática que se dividem em valores/atitudes e capacidades/aptidões a desenvolver e ainda em conhecimentos a adquirir. Para desenvolver os valores/atitudes estabelece-se que o aluno seja capaz de desenvolver: a confiança em si próprio, a curiosidade e o gosto de aprender, hábitos de trabalho e persistência, e ainda, o espírito de tolerância e de cooperação. Para desenvolver as capacidades/aptidões refere-se que o aluno seja capaz de desenvolver: a capacidade de resolver problemas, o raciocínio, a capacidade de comunicação e a capacidade de utilizar a matemática na interpretação e intervenção no real. Relativamente aos conhecimentos a adquirir, o programa menciona que o aluno deverá ampliar o conceito de número e desenvolver o cálculo, para além de desenvolver o conceito de função, de processos e técnicas de tratamento de informação, e ainda, o conhecimento do espaço.

O programa prevê o estudo dos seguintes assuntos, por ano:

7.º ano: 1 – Conhecer melhor os números; 2 – Proporcionalidade direta; 3 – Semelhança de figuras; 4 – Os números racionais; 5 – Estatística; 6 – Do espaço ao plano: sólidos, triângulos e quadriláteros; 7 – Equações.

8.º ano: 1 – Decomposição de figuras – Teorema de Pitágoras; 2 – Funções; 3 – Ainda os números; 4 – Semelhança de triângulos; 5 – Estatística; 6 – Lugares geométricos; 7 – Equações; 8 – Translações.

9.º ano: 1 – Estatística e probabilidades; 2 – Sistemas de equações; 3 – Proporcionalidade inversa. Representações gráficas; 4 – Os números reais. Inequações; 5 – Circunferência e polígonos: rotações; 6 – Equações; 7 – Trigonometria do triângulo retângulo; 8 – Espaço – outra visão.

A abordagem das equações do 1.º grau é feita nos 7.º e 8.º anos e as do 2.º grau nos 8.º e 9.º anos.

No que concerne às equações do 1.º grau, elas constituem-se, especificamente, num dos temas a estudar tanto no 7.º como no 8.º ano. No 7.º ano, o programa indica a noção de equação e de solução, equações equivalentes e resolução de equações do 1.º grau com uma incógnita – que não deverão ter denominadores – usando a adição de termos semelhantes e as regras de resolução de equações. Neste ano, as equações deverão aparecer a partir de problemas concretos como uma nova ferramenta à disposição do aluno; os princípios de equivalência deverão ser apresentados como regras que permitem resolver equações através de outras mais simples; a pesquisa de soluções de equações (quando o método de resolução ainda não seja do conhecimento do aluno) permite desenvolver hábitos de raciocínio, trabalhar com números, estimar resultados, contribuindo assim para fomentar uma atitude positiva perante as dificuldades; é conveniente que se utilizem exemplos que liguem a matemática e a vida real, a matemática e outras disciplinas, e assuntos diferentes dentro da própria matemática. No 8.º ano, o programa prevê o estudo de equações do 1.º grau, agora, com denominadores. A resolução de equações, tal como no ano anterior, deverá estar estreitamente ligada à resolução de problemas; a pesquisa de soluções constituirá ainda uma atividade com interesse para os alunos, pretendendo-se que estes encarem a resolução de uma equação como um desafio ao seu alcance.

Relativamente às equações do 2.º grau, estas aparecem no 8.º ano englobadas no estudo das equações de grau superior ao 1.º, para a resolução das quais se devem estudar as operações com polinómios (adição algébrica e multiplicação), a lei do anulamento do produto e os casos notáveis da multiplicação de binómios. Para introdução ao estudo destas equações sugere-se o uso de equações do tipo $(x-5)(x-3)=15$ acrescentando-se que os polinómios a usar deverão ser do 1.º e do 2.º grau e apenas numa variável. Já no 9.º ano, o programa menciona explicitamente a resolução de equações do 2.º grau, incompletas e completas. Para isso, amplia-se e aprofunda-se o estudo da decomposição de polinómios em fatores, que já fora abordada no ano anterior de uma forma simples, e apresenta-se a fórmula resolvente, sem demonstração. Para a resolução das equações do 2.º grau o programa refere que se deve procurar utilizar o processo mais adequado a cada situação – lei do anulamento do produto, fórmula resolvente ou noção de raiz quadrada. E acrescenta, que a resolução de equações do 2.º grau usando a fórmula resolvente, fornecerá aos alunos novos instrumentos para resolver problemas e proporcionará também novas oportunidades de exercitar algumas destrezas em cálculos com significado. Pretende-se, assim, um uso formativo da fórmula resolvente.

Não há, neste programa de 1991, qualquer referência explícita ao estudo das equações do 3.º grau. Contudo, no 8.º ano, nas sugestões metodológicas para o estudo das equações de grau superior ao 1.º, refere-se que se poderá resolver equações do tipo $x^3 - x = 0$ que deverão ser resolvidas usando a combinação muito simples da colocação de um fator em evidência e dos casos notáveis da multiplicação.

É de salientar que, com este programa, as equações passaram a ser ministradas apenas no ensino básico mas constituindo-se como uma ferramenta indispensável para o estudo de outros assuntos no ensino secundário. Em consequência, a idade dos alunos que estudam as equações passou de 12 a 15 para 12 a 14 anos. Também se constata que a discussão de equações foi eliminada dos programas.

Em 1996, encetou-se um novo movimento de renovação curricular com a chamada «reflexão participada sobre os currículos» que culminou com a publicação, em setembro de 2001, do *Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências essenciais*, coordenado por Paulo Abrantes. Enquadrando os programas escolares em vigor, estas novas orientações curriculares surgem formuladas em termos de competências e de tipos de experiências de aprendizagem a proporcionar aos alunos. Estas competências, entendidas como *saberes em ação*, integram conhecimentos, capacidades e atitudes a desenvolver pelos alunos nas várias áreas disciplinares e por ciclo, considerando-se o ensino básico como um todo. No que respeita à matemática, este documento acentua o caráter formativo da matemática escolar:

> «A matemática constitui um património cultural da humanidade e um modo de pensar. A sua apropriação é um direito de todos. (…)
> A ênfase da Matemática escolar não está na aquisição de conhecimentos isolados e no domínio de regras e técnicas, mas sim na utilização da matemática para

> resolver problemas, para raciocinar e para comunicar, o que implica a confiança e a motivação pessoal para fazê-lo». (Departamento da Educação Básica, 2001, p. 58)

Neste documento, os conhecimentos, as capacidades e as atitudes são tratados de forma integrada e sugere-se que o ensino seja feito a partir de situações do quotidiano em que se usa a matemática. Recomenda-se que os alunos devam ter oportunidades de se envolverem em diversos tipos de experiências de aprendizagem: resolução de problemas, atividades de investigação, realização de projetos e jogos.

No que concerne às competências específicas da matemática para as equações, apenas existe referência a uma: «A aptidão para usar equações (…) como meio de representar situações problemáticas e para resolver equações, (…)»

Na opinião de Ponte (2003, p. 11-12), apesar de ser «discutível como todos os documentos curriculares, este documento constitui, sem dúvida, a formulação de orientações gerais oficiais para o ensino da disciplina mais avançada e mais coerente jamais realizada no nosso país».

Impunha-se, portanto, que se elaborasse um programa que integrasse estas novas e importantes orientações curriculares.

Em 2007[44], foi homologado um novo programa de matemática que se auto define como um reajustamento do programa de 1991 – «e não um programa radicalmente novo» – devido à necessidade de uma intervenção urgente, que corrigisse os principais problemas existentes. Mas o facto de se tratar de um reajustamento não obstou a que se introduzissem mudanças significativas em alguns aspetos: nas finalidades e objetivos gerais para o ensino da matemática; nas capacidades transversais a toda a aprendizagem da matemática – resolução de problemas, raciocínio matemático e comunicação matemática –, e na assunção de que o ensino-aprendizagem se desenvolve em torno de quatro eixos fundamentais: o trabalho com os números e operações, o pensamento algébrico, o pensamento geométrico e o trabalho com dados.

Este documento que perfaz um total de 73 páginas, apresenta o programa organizado por ciclos e não por anos de escolaridade. Deste modo, a álgebra é introduzida como tema programático nos 2.º e 3.º ciclos, e no 1.º ciclo tem já lugar uma iniciação ao

[44] Segundo a página oficial na internet do Ministério da Educação e Ciência, este programa foi homologado a 28 de dezembro de 2007. No entanto a sua implementação em todas as escolas do país, só se deu no ano letivo 2010/2011 e apenas para o 7.º ano. No ano letivo seguinte foi a vez do 8.º ano e em 2012/2013, a do 9.º ano.

pensamento algébrico. Para além disso, a organização e tratamento de dados é reforçada em todos os ciclos e os números e a geometria são reestruturados tendo em vista uma maior coerência ao longo dos três ciclos.

São duas as finalidades do ensino da matemática: promover a aquisição de informação, conhecimento e experiência em matemática e o desenvolvimento da capacidade da sua integração e mobilização em contextos diversificados; e, desenvolver atitudes positivas face à matemática e a capacidade de apreciar esta ciência.

Quanto aos objetivos gerais do ensino da matemática, estes pretendem clarificar o significado e alcance das finalidades referidas, procurando tornar mais explícito o que se espera da aprendizagem dos alunos, valorizando as dimensões dessa aprendizagem relacionadas com a representação, comunicação e raciocínio em matemática, a resolução de problemas e as conexões matemáticas, e a compreensão e disposição para usar e apreciar a matemática em contextos diversos.

Como já foi referido, o programa não apresenta os conteúdos distribuídos por anos, mas por ciclo. E é no 3.º ciclo que cabe a aprendizagem da resolução de equações do 1.º e do 2.º grau a uma incógnita. Relativamente às primeiras, há referência a dois objetivos específicos: compreender as noções de equação e de solução de uma equação e identificar equações equivalentes; e, resolver equações do 1.º grau utilizando as regras de resolução. Estas equações deverão incluir casos em que a incógnita esteja presente num ou em ambos os membros da equação, em que seja necessário desembaraçar previamente de parênteses ou que tenha coeficientes fracionários.

Quanto às equações do 2.º grau, apenas se refere um objetivo específico que é resolver equações do 2.º grau a uma incógnita. Para isso, deve-se começar pela resolução das equações incompletas, utilizando a noção de raiz quadrada, a decomposição em fatores e a lei do anulamento do produto e, por último, o uso da fórmula resolvente para as equações completas. O programa refere, ainda, que o estudo deste tema é uma boa oportunidade para os alunos com melhor desempenho matemático demonstrarem algebricamente a fórmula resolvente.

Neste programa de 2007, contrariamente ao que se verifica no programa de 1991, não há qualquer referência, implícita ou explícita, a equações do 3.º grau.

4.3. As equações no *Compêndio de Matemática*

Neste subcapítulo proceder-se-á a uma análise ao modo como José Sebastião e Silva abordou o tema das equações dos 1.º, 2.º e 3.º graus no *Compêndio de Matemática*, seguindo-se, no subcapítulo seguinte, a análise de outros manuais escolares relativamente ao mesmo tipo de equações.

A metodologia adotada para a análise terá como ponto de partida a utilizada por Sierra, González e López (2003) e será semelhante às de Ponte (2004), Ponte, Salvado, Fraga, Santos e Mosquito (2007) e Abreu (2011). Para cada livro far-se-á uma descrição geral do modo como o tema é abordado, a que se seguirá uma análise considerando três dimensões, de acordo com a tabela 4, e que é semelhante à dos referidos autores:

Análise conceptual	**Análise didático-cognitiva**	**Análise fenomenológica**
Sequência de conteúdos	Objetivos e intenções dos autores	Em torno da própria matemática
Definições: tipo e papel que desempenham no texto	Teorias de ensino-aprendizagem subjacentes	Em torno de outras ciências
Exemplos e exercícios		
Representações gráficas e simbólicas		Fenómenos da vida quotidiana

Tabela 4 – As três dimensões da análise dos manuais escolares. (Sierra, González & López, 2003)

Análise conceptual refere-se a como se define e organiza o conceito ao longo do texto, representações gráficas e simbólicas utilizadas, problemas e exercícios resolvidos ou propostos que determinam a apresentação do conceito. Esta dimensão será identificada por «Organização e grafismo».

Análise didático-cognitiva refere-se tanto à explicitação dos objetivos que os autores pretendem atingir como às teorias de ensino-aprendizagem subjacentes. Esta dimensão será identificada por «Aspetos didáticos».

Análise fenomenológica caracteriza-se pelos fenómenos que se têm em consideração relativamente às equações: em torno da matemática ou de outras ciências e fenómenos da vida quotidiana. Esta dimensão será identificada por «Aspetos fenomenológicos».

***Compêndio de Matemática* de José Sebastião e Silva**

Este manual foi publicado em 1975, já depois da morte do seu autor, por iniciativa do G.E.P. Os seus textos foram redigidos por José Sebastião e Silva no âmbito da experiência pedagógica realizada nos liceus portugueses na década de 60 do século XX (ver subcapítulo 3.3.).

No *Compêndio de Matemática*, o estudo das equações dos 1.º, 2.º e 3.º graus aparece integrado no capítulo VI do 1.º volume, 2.º tomo.

Fig. 13 - Capa do *Compêndio de Matemática - 1.º vol, 2.º tomo* de José Sebastião e Silva

Tal como já foi referido no subcapítulo 3.4. deste trabalho, o manual tem dimensões 15,5 cm por 23,5 cm. A capa é mole, tem fundo branco e uma faixa horizontal azul na qual surge o título escrito a branco e em maiúsculas. Ao longo das suas 303 páginas, todo o texto é escrito apenas a negro. O entrelinhamento é apertado e o tamanho da letra reduzido. O livro está organizado em capítulos que se dividem em pontos. São visíveis alguns esquemas e tabelas, mas muito poucos gráficos.

Descrição

O capítulo VI – «Anéis e corpos. Números complexos. Álgebras de Boole» – é constituído por 33 pontos desenvolvidos em 126 páginas. A abordagem das equações surge nos pontos 8, «Generalidades sobre equações relativas a corpos» (pouco mais de 3 páginas), 9, «Equações lineares com uma incógnita» (cerca de 2 páginas), 10, «Equações do 2.º grau com uma incógnita» (4 páginas), 11, «Resolução e discussão das equações quadráticas» (4 páginas), 12, «Característica dum corpo» (pouco mais de uma página), 13, «Equações quadráticas no corpo $\mathbb{R}$» (3 páginas) e 21, «Equações do 3.º grau» (6 páginas)[45].

O ponto 8 inicia-se com a referência às noções de *equação relativa a K*, *incógnitas*, *soluções*, equação *possível* e equações *equivalentes*. O autor refere que a resolução de equações no corpo K assenta nos «Princípios de equivalência» (figura 14) e no «Princípio

[45] Os pontos prévios a estes são: «1. Conceito de anel», «2. Isomorfismos entre anéis», «3. Cálculo algébrico num anel comutativo; operações sobre polinómios», «4. Anéis de polinómios», «5. Divisão por polinómios do tipo $x-\alpha$; raízes dum polinómio», «6. Elementos regulares e divisores de zero num anel» e «7. Conceito de corpo».

de decomposição», exemplificando com a resolução de duas equações em $\mathbb{R}$, uma do 3.º grau e outra do 2.º.

PRINCÍPIO I. *Substituindo um dos membros duma equação por uma expressão equivalente, obtém-se uma equação equivalente à primeira.*

PRINCÍPIO II. *Quando um dos membros duma equação tem a forma de uma soma de duas ou mais expressões, obtém-se uma equação equivalente à primeira, passando para o outro membro uma dessas expressões multiplicada por* -1.

PRINCÍPIO III. *Multiplicando ambos os membros duma equação por um elemento de K diferente de zero obtém-se uma equação equivalente à primeira.*

Fig. 14 - Princípios de equivalência no *Compêndio de Matemática* de Sebastião e Silva.

De seguida, dá-se a definição de *equação algébrica de grau n* e particulariza-se para quando *n* é 0, 1, 2, 3 ou 4. Informa-se ainda, que se pode baixar o grau de uma equação desde que dela se conheça uma raiz dando-se como exemplo a equação $x^3 - 5x - 2 = 0$ e a raiz -2.

No ponto 9, dá-se a definição de *equação linear com uma incógnita* relativa a um corpo K, como sendo «toda a equação de grau 1 ou 0, isto é, toda a equação que pelos princípios de equivalência, seja redutível à forma: $ax + b = 0$ em que a e b sejam elementos conhecidos de K». Em seguida, faz-se a discussão desta equação separando em três casos: quando $a \neq 0$, quando $a = 0 \wedge b \neq 0$ e quando $a = 0 \wedge b = 0$. No final deste ponto, apresentam-se dois exercícios, com as respetivas respostas. Pede-se para resolver, no primeiro, 4 equações em $\mathbb{R}$ e, no segundo, 3 equações no corpo A_5[46].

[46] Os corpos A_μ já foram apresentados e trabalhados no ponto 7 (página 95 do manual).

EXERCÍCIOS — I. Resolva em IR as seguintes equações (ver *Compêndio de Álgebra, 7.º ano,* Cap. XIII, n.º 8) ([1]):

a) $\frac{x+4}{x} = \frac{x+9}{x+3}$ b) $\frac{1}{2} + \frac{4}{5x-5} = \frac{x}{2x-6}$

c) $\frac{x-1}{2} = x - \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{2}\right)$ d) $\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{5x-1}{2} - x\right)$

Fig. 15 – Exercício I do *Compêndio de Matemática* de Sebastião e Silva.

O ponto 10 inicia com a definição de *equação do 2.º grau (ou equação quadrática)* relativa a um corpo K qualquer, como sendo «toda a equação que, pelos princípios de equivalência, se pode reduzir à forma $ax^2 + bx + c = 0$, sendo a, b e c elementos conhecidos de K, com $a \neq 0$»; em seguida, surge um teorema que se refere à possibilidade de se decompor um polinómio num produto de fatores lineares do tipo $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ e que, além disso, se tem $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1.x_2 = \frac{c}{a}$, onde x_1 e x_2 são as raízes do polinómio. Após a demonstração do teorema, na qual é utilizada a Regra de Ruffini, surgem 3 corolários. O primeiro refere-se à não existência de mais do que duas raízes distintas para uma equação do 2.º grau, os segundo e terceiro corolários referem-se à natureza das raízes de um polinómio quando $b = 0$ ou $c = 0$, respetivamente. Depois do primeiro corolário apresentam-se 3 exemplos de equações do 2.º grau que são usados para definir *raiz dupla* e *raízes simples*. O ponto termina com a informação de que é sempre possível construir uma equação do 2.º grau dadas as suas raízes x_1 e x_2, tomando a equação a forma de $x^2 - Sx + P = 0$, sendo $S = x_1 + x_2$ e $P = x_1.x_2$.

O ponto 11 inicia-se com a definição de *equação quadrática binómia*, como sendo «toda a equação da forma $x^2 - \alpha = 0$, com $\alpha \in K$», seguida da sua resolução e de um exemplo em A_5. Segue-se a resolução da equação quadrática qualquer em K, transformando-se, à custa de uma nova incógnita, numa equação binómia (figura 16). É a dedução da fórmula resolvente da equação do 2.º grau.

Para resolver uma equação quadrática qualquer em K

$$(1) \qquad ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0),$$

procura-se transformá-la numa equação binómia com uma outra incógnita. Ponhamos $x = y + h$, em que y é a nova incógnita e h um elemento a determinar. Então o 1.º membro de (1) transforma-se em

$$(2) \quad a(y^2+2hy+h^2)+b(y+h)+c \equiv ay^2+(2ah+b)y+ah^2+bh+c$$

Assim, para obter uma equação binómia, deveremos fazer $2ah+b=0$, o que equivale a tomar

$$(3) \qquad h = -\frac{b}{2a}, \quad \textit{desde que seja } 2a \neq 0.$$

Vamos, pois, supor daqui por diante que o corpo K verifica a seguinte condição:

$$(4) \qquad a \neq 0 \Rightarrow 2a \neq 0, \quad \forall a \in K$$

Esta condição não se verifica em A_2, mas verifica-se em $\mathbb{Q}$, em $\mathbb{R}$ e em muitos outros corpos, como veremos adiante.

Entrando com o valor (3) de h no 2.º membro de (2) obtemos:

$$ay^2 + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c \equiv ay^2 - \frac{b\ -4ac}{4a}$$

Igualando a zero e multiplicando ambos os membros por a^{-1}, obtém-se a equação binómia

$$(5) \qquad y^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} = 0$$

É agora, evidente que

$$\begin{cases} ax^2+bx+c=0 \\ x = y - \dfrac{b}{2a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = \dfrac{b^2-4ac}{4a^2} \\ y = x + \dfrac{b}{2a} \end{cases}$$

Assim, a resolução de (1) *é reduzida à resolução da equação binómia* (5), *chamada 'equação resolvente' da primeira.*

Como $4a^2 = (2a)^2$ é fácil ver que a equação (5) é resolúvel *sse* $b^2 - 4ac$ *tiver raiz quadrada*. Virá portanto, *nesta hipótese*, representando por $\sqrt{b^2-4ac}$ *uma* das raízes quadradas:

$$y^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2} \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

e portanto, visto que $x = -\dfrac{b}{2a} + y$:

$$ax^2+bx+c=0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Esta última fórmula, que é apenas um modo abreviado de escrever

$$(6) \qquad x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \vee \quad x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

Fig. 16 – Resolução da equação quadrática no *Compêndio de Matemática* de Sebastião e Silva.

Ainda no ponto 11, designa-se o *discriminante da equação* como $\Delta = b^2 - 4ac$, fazendo-se em seguida uma discussão das equações quadráticas à custa do Δ. Os resultados são apresentados na forma de teorema e num resumo (figura 17).

$$\exists z \in K:\ z^2 = \Delta \Rightarrow \begin{cases} \Delta \neq 0 \Rightarrow \exists^2 \textit{ raízes simples de } (1) \textit{ em } K \\ \Delta = 0 \Rightarrow \exists^1 \textit{ raiz dupla de } (1) \textit{ em } K \end{cases}$$

$$(\sim \exists z \in K:\ z^2 = \Delta) \Rightarrow (\sim \exists \textit{ raiz de } (1) \textit{ em } K.)$$

Fig. 17 - Resumo da discussão da equação quadrática à custa de Δ.

A fechar este ponto, propõe-se 2 exercícios nos quais se pede para discutir e resolver 3 equações em A_7, no primeiro, e, no segundo, para resolver 6 equações em $\mathbb{R}$. Para estes dois exercícios não se apresentam as respostas.

O ponto 12 refere-se à característica de um corpo, salientando-se que os corpos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ têm característica zero, de acordo com a primeira definição. Na segunda, define-se corpo K de característica *p*.

No ponto 13, faz-se a discussão das equações quadráticas no corpo $\mathbb{R}$, em função do sinal de Δ, de P e de S, do qual se apresenta o resumo (figura 18). No final, numa nota, faz-se referência à fórmula resolvente e ao discriminante simplificados.

$P < 0$: 2 *raízes com sinais contrários*

$P = 0$: $x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{b}{a}$

$$P > 0 \begin{cases} \Delta > 0: \begin{cases} S > 0: \text{ 2 } \textit{raízes positivas} \\ S < 0: \text{ 2 } \textit{raízes negativas} \end{cases} \\ \Delta = 0: \text{ 1 } \textit{raiz dupla, } x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} \\ \Delta < 0: \textit{ nenhuma raiz em } \mathbb{R} \end{cases}$$

No primeiro caso ($P < 0$) ainda podemos distinguir as hipóteses (1):

$$P < 0 \begin{cases} S = 0: \text{ 2 } \textit{raízes simétricas} \\ S > 0: \textit{ predomínio da raiz positiva} \\ S < 0: \textit{ predomínio da raiz negativa} \end{cases}$$

Fig. 18 - Resumo da discussão das equações quadráticas no corpo $\mathbb{R}$.

O estudo das equações do 3.º grau é apresentado no ponto 21, que começa com a definição de *equação do 3.º grau* (ou *equação cúbica*) relativa a um corpo K, como sendo «toda a equação que, pelos princípios de equivalência, possa ser reduzida à forma $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ em que a, b, c, d são elementos dados de K, com $a \neq 0$». De seguida, o autor justifica que uma equação deste tipo não pode ter mais do que 3 raízes distintas.

O autor continua o ponto 21 apresentando a definição de *equação cúbica binómia* (relativa a K) como sendo «toda a equação da forma $x^3 - \alpha = 0$ ou ainda $x^3 = \alpha$, com $\alpha \in$ K» e de *raiz cúbica* de α, apresentando também a simbologia, $\sqrt[3]{\alpha}$. De seguida, apresenta exemplos de raízes cúbicas nos corpos A_5 e A_7, começando previamente por definir a função $x \mapsto x^3$ em cada um dos domínios destes corpos.

Em seguida, o autor apresenta a resolução de uma equação cúbica qualquer, reduzindo a sua resolução às das equações cúbicas binómias, de forma análoga às equações do 2.º grau. No final da resolução, o resultado é apresentado na forma de teorema (figura 19) cuja fórmula, com um aspeto um pouco diferente, o autor informa chamar-se de Tartaglia, apesar da ideia base que lhe deu origem, no início do século XVI, pertencer a Scipione Del Ferro. E remete o aluno para a leitura da Nota Histórica no *Compêndio de Álgebra – 7.º ano*.

Dada uma equação cúbica qualquer, é natural procurar reduzir a sua resolução à de equações binómias (***resolução algébrica ou resolução por meio de radicais***). Em primeiro lugar, procuremos, como na equação do 2.º grau, determinar um elemento h tal que, substituindo x por y + h se obtenha uma equação cúbica em y:

(2) $$a(y+h)^3 + b(y+h)^2 + c(y+h) + d = 0$$

em que o coeficiente de y^2 seja nulo. Ora, feitos os cálculos necessários, vê-se que o termo em y^2, para cada valor de h, é $(3ah + b)y^2$. *Suponhamos que o corpo* K *não é de característica* 3. Então

$$3ah + b = 0 \Leftrightarrow h = -\frac{b}{3a}$$

Portanto, atribuindo este valor a *h* em (2) e multiplicando ambos os membros da equação (2) por a^{-1}, obtém-se uma equação em que o coeficiente de y^3 é 1 e o coeficiente de y^2 é 0. Podemos, pois, reduzir o nosso estudo a equações da forma

(3) $$x^3 + px + q = 0 \quad , \quad \text{com } p, q \in K$$

Para tentar resolver uma tal equação, ponhamos

(4) $$x = u + v$$

e procuremos determinar u,v de modo que se verifique a equação (3). Esta assume então a forma

$$u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 + p(u+v) + q = 0$$

ou seja

$$u^3 + v^3 + + (3uv + p)\ (u + v) + q = 0$$

e vê-se que será verificada, *se*

(5) $$u^3 + v^3 = -q \ \wedge \ uv = -\frac{p}{3}$$

Procuremos, então, determinar dois elementos α e β de K tais que

(6) $$\alpha + \beta = -q \ \wedge \ \alpha\beta = -\left(\frac{p}{3}\right)^3$$

Tais elementos, se existem, serão as raízes da equação

$$(z - \alpha)\ (z - \beta) = 0 \ \Leftrightarrow \ z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0,$$

dadas pela fórmula resolvente usual, *se o corpo* K *não é de característica* 2. Suponhamos verificada mais esta hipótese e tomemos:

(7) $$\alpha = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Suponhamos, agora, que existe pelo menos uma raiz cúbica de α e designemo-la por $\sqrt[3]{\alpha}$. Então, como $\alpha\beta = -\frac{p^3}{27}$ e $\alpha + \beta = -q$ virá:

$$\beta = -\frac{p^3}{27\alpha} \quad \text{e} \quad \left(\sqrt[3]{\alpha}\right)^3 + \left(-\frac{p}{3\sqrt[3]{\alpha}}\right)^3 = -q$$

Por conseguinte, *se* tomarmos

$$u = \sqrt[3]{\alpha} \ \wedge \ v = -\frac{p}{3\sqrt[3]{\alpha}}$$

a condição (4) é verificada e assim, pondo $x = u + v$, também a equação (2) será verificada. Em conclusão:

TEOREMA. *Se* K *tem característica diferente de* 2 *e de* 3, *a fórmula*

(8) $$\boxed{x = \sqrt[3]{\alpha} - \frac{p}{3\sqrt[3]{\alpha}}, \quad \text{com } \alpha = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

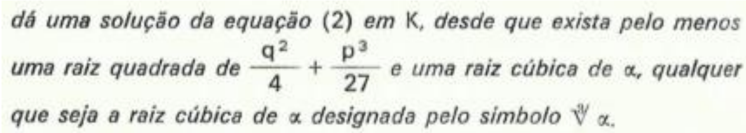

dá uma solução da equação (2) em K, desde que exista pelo menos uma raiz quadrada de $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ e uma raiz cúbica de α, qualquer que seja a raiz cúbica de α designada pelo símbolo $\sqrt[3]{\alpha}$.

Fig. 19 - Resolução da equação cúbica - Fórmula de Tartaglia.

A fechar este ponto, o autor apresenta, a título de exemplo, a resolução de 3 equações do 3.º grau. As duas primeiras no corpo $\mathbb{R}$ e a terceira no corpo A_5. Relativamente a estas equações, a fórmula de Tartaglia fornece uma solução para a primeira equação mas o mesmo não acontece para a segunda, apesar de esta ter 3 raízes reais. Numa «NOTA MUITO IMPORTANTE», Sebastião e Silva afirma que «Alargando o corpo $\mathbb{R}$, com a introdução dos *números imaginários*, a fórmula de Tartaglia passa a fornecer as três raízes reais da equação, como veremos mais adiante» (Silva, 1975b, p. 141). Este «mais adiante» acontece depois da criação do corpo complexo.

Análise

Organização e grafismo. O estudo das equações é apresentado no capítulo VI em 7 dos seus 33 pontos. Nestes pontos não existe qualquer gráfico, quadro, tabela ou esquema. O texto é denso, não sendo utilizada qualquer outra cor para além da preta. A letra é de tamanho reduzido e o entrelinhamento apertado. Os exercícios, com ou sem respostas, surgem em número reduzido e ao longo do texto.

Aspetos didáticos. No estudo das equações no *Compêndio de Matemática*, a terminologia é apresentada essencialmente no início. São relembradas, logo no começo, as noções de «equação relativa a K», «incógnitas», «soluções», equação «possível», equações «equivalentes», para logo a seguir se recordar os 3 princípios de equivalência e o princípio de decomposição. É curioso notar que o «Princípio de decomposição» a que Sebastião e Silva se refere é atualmente designado por lei do anulamento do produto.

Na abordagem apresentada às equações, apenas se reconhecem movimentos do geral para o particular em que se faz uma discussão em termos gerais seguida da apresentação de alguns exemplos. Este movimento está patente quando, na página 98, se começa por apresentar o princípio de decomposição seguido de 2 exemplos. Também na página 103, o autor apresenta 3 exemplos depois do corolário. E na página 105, apresenta-se um exemplo posteriormente à definição de equação quadrática binómia. Da mesma forma se faz, nas páginas 138 e 139, a resolução da equação cúbica e em seguida se apresenta 3 exemplos de aplicação dos resultados (páginas 140 e 141). O nível de formalização da linguagem é elevado.

Salienta-se a preocupação do autor, essencialmente aquando da discussão das equações em apresentar os resultados na forma de resumo. Observa-se a existência de um número reduzido de exercícios propostos, mas que o autor complementa, ao longo do texto e/ou em nota de rodapé, com as várias sugestões de consulta do *Compêndio de Álgebra* (páginas 98 e 100). A sugestão de consulta serve também para os alunos procurarem outros exemplos (páginas 105 e 112) e a nota histórica (pág. 140). Não se apresenta qualquer exercício para as equações do 3.º grau.

O autor solicita, muitas vezes, a participação dos alunos com a expressão «(Porquê?)» para a justificação de certos passos nos raciocínios apresentados: 3 vezes em cada uma das páginas 104 e 109 e uma vez na página 112. Usa também a expressão «(prove)» duas vezes na página 140.

Salienta-se ainda o uso das siglas «sse» e «q.e.d.». A segunda surge no final de um raciocínio na página 109 e o seu significado é «quod erat demonstrandum».

Relativamente às equações dos 1.º e 2.º graus, Sebastião e Silva defende que o interesse da sua discussão deve servir, essencialmente para a resolução e discussão de problemas concretos: «Este assunto, como dum modo geral tudo o que se refere a aplicações concretas da matemática, é da máxima importância, quer formativa, quer informativa. É principalmente a propósito de problemas concretos e não em abstracto – que interessa fazer a discussão de equações (…)» (Silva, 1978, p. 135-136)

Acerca do estudo das equações do 3.º grau, o autor refere que este «deverá restringir-se ao corpo real e *ser considerado, essencialmente, como motivação para o estudo do corpo complexo*». (Silva, 1975d, p. 140)

É de salientar que este não é um manual de álgebra mas sim de matemática. Sebastião e Silva considerava, portanto, que a álgebra estava integrada na matemática.

Aspetos fenomenológicos. No estudo das equações, todas as situações trabalhadas revestem-se de um caráter estritamente matemático. Todas as situações são formuladas e resolvidas em termos algébricos. Não há nenhuma referência a outras ciências, nem à vida quotidiana. Apenas existe uma referência histórica, na abordagem das equações do 3.º grau, quando se faz menção à fórmula de Tartaglia e Scipione Del Ferro (pág. 140).

4.4. As equações noutros manuais escolares

Como já foi referido anteriormente, com a reforma do ensino liceal de 1947 passou a vigorar em Portugal o regime de livro único para todas as disciplinas. Todos os *compêndios* (assim era a designação) tinham de obedecer à imposição legislativa e eram alvo de rigorosa avaliação dado que eram considerados, por parte do *Estado Novo*, como um importante veículo transmissor de valores e de inculcação ideológica. Apesar disso e talvez devido à especificidade da disciplina, os manuais de matemática não eram o grande alvo desse controlo. A primeira lista[47] de manuais aprovados, com validade de cinco anos, foi publicada em 24 de junho de 1950, no Diário do Governo, II Série, n.º 145.

Atualmente, a lei que define o regime de avaliação, certificação e adoção aplicável aos manuais escolares e outros recursos didático-pedagógicos para o ensino básico e para o ensino secundário é a lei n.º 47/2006, de 28 de agosto, que é regulamentada pelo decreto-lei n.º 261/2007, de 17 de julho. De acordo com o disposto na alínea b) do artigo 3.º da referida lei, define-se manual escolar como sendo o:

> «recurso didáctico-pedagógico relevante, ainda que não exclusivo, do processo de ensino e aprendizagem, concebido por ano ou ciclo, de apoio ao trabalho autónomo do aluno que visa contribuir para o desenvolvimento das competências e das aprendizagens definidas no currículo nacional para o ensino básico e para o ensino secundário, apresentando informação correspondente aos conteúdos nucleares dos programas em vigor, bem como propostas de actividades didácticas e de avaliação das aprendizagens, podendo incluir orientações de trabalho para o professor;»

Para além do manual escolar a lei reconhece ainda, outros recursos didáticos-pedagógicos e, de acordo com a alínea c) do mesmo artigo, define-os do seguinte modo:

> « «Outros recursos didáctico-pedagógicos» [são] os recursos de apoio à acção do professor e à realização de aprendizagens dos alunos, independentemente da forma de que se revistam, do suporte em que são disponibilizados e dos fins para que foram concebidos, apresentados de forma inequivocamente autónoma em relação aos manuais escolares;»

[47] Para a disciplina de matemática, foram classificados como livros únicos para o ensino liceal: *Compêndio de Álgebra* de António Augusto Lopes, *Elementos de Geometria Analítica Plana* de António Nascimento Palma Fernandes e *Compêndio de Trigonometria* de Pedro de Campos Tavares.

Segundo o disposto no artigo 4.º da lei n.º 47/2006, de 28 de agosto, o período de vigência dos manuais escolares do ensino básico e ensino secundário é em média de 6 anos, podendo ser encurtado se o conhecimento científico evoluir de forma célere ou o conteúdo dos programas se revelar desfasado relativamente ao conhecimento científico generalizadamente aceite.

Ainda de acordo com a mesma lei, um dos objetivos do procedimento de avaliação e certificação de manuais escolares é garantir a qualidade científica e pedagógica dos manuais a adotar, assegurar a sua conformidade com os objetivos e conteúdos do currículo nacional e dos programas ou orientações curriculares em vigor e atestar que constituem instrumento adequado de apoio ao ensino e à aprendizagem e à promoção do sucesso educativo.

Neste trabalho far-se-á uma análise, no que às equações diz respeito, de vários manuais escolares correspondentes a momentos distintos da história do ensino da matemática em Portugal. Os primeiros livros a serem analisados serão os adotados no ensino liceal e contemporâneos do *Compêndio de Matemática* aos quais se seguirão manuais de 1986, 1980 e, ainda, outros já publicados no século XXI. Tal como já foi referido e devido ao facto de o programa de 2007 ser um reajustamento do programa de 1991, também os manuais escolares referentes a esse período são em tudo muito semelhantes aos manuais que dizem respeito ao programa de 1991.

Na época em que Sebastião e Silva redigiu o *Compêndio de Matemática* para a experiência pedagógica que concebeu e orientou, os livros que então vigoravam no ensino liceal e que incluíam o estudo das equações eram o *Compêndio de Álgebra*[48] de José Jorge Gonçalves Calado e o *Compêndio de Álgebra*[49] de José Sebastião e Silva e José Duarte da Silva Paulo. O primeiro destinava-se aos 3 anos do 2.º ciclo e manteve-se como livro único até ao final da década de 60; o segundo era o compêndio para o tema álgebra do 3.º ciclo e manteve-se como livro único de 1963 a 1973, este livro era constituído por dois volumes[50], um para cada ano, *Compêndio de Álgebra, Ensino Liceal, Tomo I – VI ano* e *Compêndio de Álgebra, Ensino Liceal, Tomo II – VII ano.*

[48] Como consta no Parecer da Junta Nacional da Educação publicado no Diário do Governo n.º 46, II série, de 24 de fevereiro de 1965, para o período de 1965 a 1970.
[49] Como consta nos Pareceres da Junta Nacional da Educação publicados no Diário do Governo n.º 100, II série, de 27 de abril de 1963, para o período de 1963 a 1968; e, no Diário do Governo n.º 110, II série, de 8 de maio de 1968, para o período de 1968 a 1973.
[50] Houve uma edição anterior, de 1960, que era composta por um só volume constituído por duas partes, uma para o 6.º ano e a outra para o 7.º ano.

***Compêndio de Álgebra* de José Jorge Gonçalves Calado**

Este livro foi publicado em 1965, sendo a depositária a Livraria Sá da Costa em Lisboa e destinava-se ao estudo do tema *álgebra* para os alunos dos três anos do 2.º ciclo do liceu. Nas primeiras páginas, informa-se que o seu autor é «Professor do Liceu Normal de Pedro Nunes» e apresenta-se o número e o carimbo oficiais que atestam a aprovação deste livro como único. Na contracapa surge o texto: «Aprovado oficialmente como livro único (Diário do Governo N.º 46, II Série, de 24-II-1965)» e a referência ao valor monetário do livro: «PREÇO: Esc.: 30$00».

As dimensões deste manual são cerca de 18 cm por 25 cm, as capas são duras de cor verde escuro e no interior o entrelinhamento é apertado ao longo das suas 435 páginas. O livro dispõe os conteúdos divididos por três partes correspondentes aos três anos do ciclo, dando-se início a cada uma das partes, como fonte de legitimidade oficial, com a explicitação do programa correspondente. Destaca-se a apresentação metódica dos conteúdos organizada em parágrafos: definição, exemplos/problemas, teorema, demonstração e no final de cada tema um número elevado de exercícios e respetivas respostas. Observa-se alguma preocupação em fazer referências bibliográficas.

Descrição

O capítulo VI, respeitante às equações numéricas do 1.º grau a uma incógnita para o 3.º ano do ensino liceal, tem 21 páginas e está dividido em três secções que, por sua vez, são formadas por 25 parágrafos (§§ 104 a 128). A primeira secção designa-se «Generalidades» (cerca de seis páginas), a segunda «Princípios de equivalência» (cerca de sete páginas) e a terceira «Equação do 1.º grau a uma incógnita» (cerca de cinco páginas). O capítulo termina com exercícios e respetivas respostas (cerca de três páginas).

A primeira secção inicia-se com o § 104, que, como motivação, discute a «origem e significado das equações». Os §§ 105 e 106 apresentam dois problemas cuja resolução envolve, respetivamente, uma equação com uma e duas incógnitas e onde se apresenta o significado de «dado» e «incógnita». O primeiro destes problemas é o seguinte: «João tem o triplo da idade de António; a soma das duas idades é igual a 32 anos. Que idade tem

António?». Os §§ 108 e 109 apresentam a definição de «equação» à custa da noção de «igualdade» e a definição de raiz ou solução (figura 20).

108 — Definição — *Chama-se equação a toda a igualdade que só é verificada para* **certos** *valores atribuídos às letras que nela figuram (incógnitas).*

Assim, a igualdade:

$$4x = 32$$

é uma equação, visto que só é verificada para $x = 8$.

Também é uma equação a igualdade

$$4x - 3y = 11$$

visto que só é verificada para *certos* valores de x e y.

109 — Raiz ou solução — Os valores das incógnitas que *satisfazem à equação*, isto é, que dão aos seus dois membros valores numéricos iguais, chamam-se **raízes** ou **soluções** da equação.

Assim, a equação

$$2x + 1 = 3x - 5$$

admite a solução ou raiz

$$x = +6$$

visto que para $x = +6$ os valores numéricos de $2x + 1$ e $3x - 5$ são iguais.

Com efeito

$$2 . (+6) + 1 = 3 . (+6) - 5$$

ou

$$12 + 1 = 18 - 5$$

$$13 = 13$$

Fig. 20– Definições no *Compêndio de Álgebra – 3.º ano* de J. J. Calado

Os §§ 110 e 111 indicam uma definição e notação/símbolo para «identidade» e referem exemplos de identidades notáveis. O § 112 indica quatro afirmações assim enunciadas:

> « a) Toda a equação é uma igualdade condicionada.
> b) Toda a identidade traduz uma igualdade que não depende dos valores atribuídos às letras que nela figuram.
> c) Toda a equação estabelece um problema.
> d) Toda a identidade estabelece um facto.» (Calado, 1965)

O § 113 fornece a noção de equações equivalentes e o § 114 esclarece o significado de «resolver uma equação», preparando o terreno para a secção seguinte.

A segunda secção, acerca dos princípios de equivalência, contém nos §§ 115 a 120 o enunciado destes princípios, como se pode observar na figura 21.

1.º princípio de equivalência — *Se substituirmos um, ou os dois membros, duma equação por expressões que lhes sejam respectivamente equivalentes, obteremos uma equação equivalente à primeira.*

2.º princípio de equivalência — *Se adicionarmos a ambos os membros duma equação o mesmo número, ou a mesma expressão inteira, obteremos uma equação equivalente à primeira.*

3.º princípio de equivalência — *Se multiplicarmos ambos os membros duma equação por um número diferente de zero, ou por uma expressão algébrica que não contenha a incógnita, obteremos uma equação equivalente.*

Fig 21– Os princípios de equivalência no *Compêndio de Álgebra - 3.º ano* de J. J. Calado

No § 117 dá-se uma regra prática da transposição de termos enunciada do seguinte modo: «Se transpusermos um termo de uma equação de um membro para o outro e lhe trocarmos o seu sinal, obteremos uma equação equivalente à primeira». O § 121 introduz uma classificação de equações quanto ao número de incógnitas e à sua natureza (inteira ou não). O § 122 define o grau de uma equação inteira.

A terceira secção abre com o § 123 que faculta uma definição de equação do 1.º grau a uma incógnita, como sendo «toda a equação inteira que se pode reduzir à forma $ax = b$». No § 124 discute-se a resolução algébrica, indicando a partir de dois exemplos, cinco passos a seguir na resolução de uma equação. O primeiro destes exemplos é muito simples e o segundo é bastante mais complexo:

$$-2x = 3 \qquad \text{e} \qquad \frac{x}{2} - 2(3-x) = 3 + \frac{x}{4}$$

De seguida, o § 125 apresenta a resolução gráfica da equação $2x - 4 = 0$, como se pode observar na figura 22. O §126 fornece um procedimento em 4 passos para resolver uma equação do 1.º grau a uma incógnita. Os §§ 127 e 128 são, respetivamente, uma observação ao primeiro ponto do procedimento anterior e a resolução gráfica de outra equação.

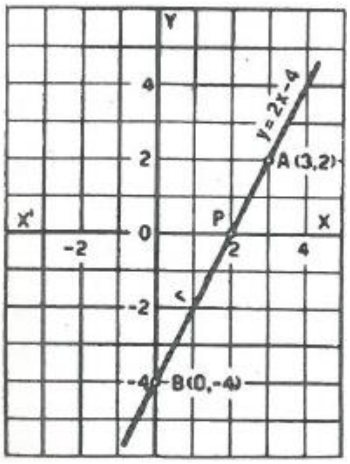
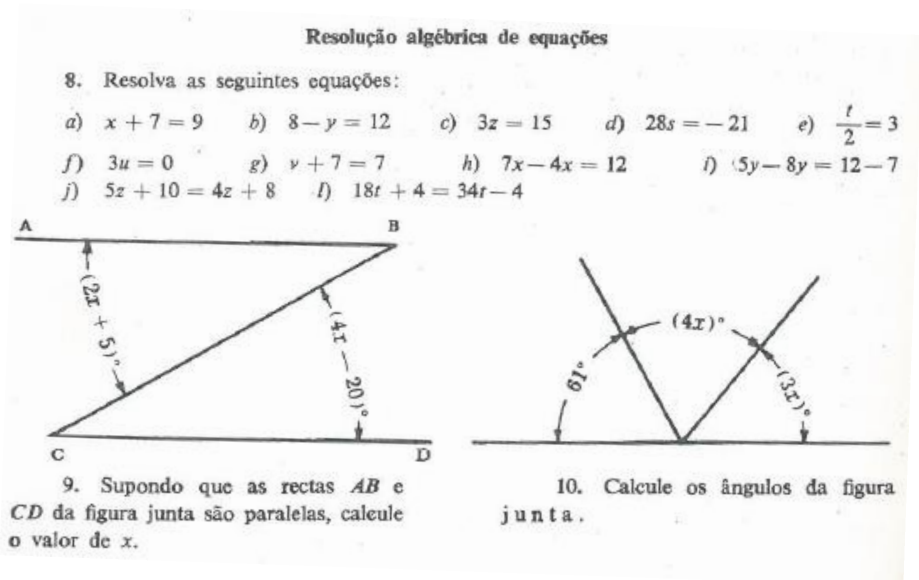


Fig. 22 – Resolução gráfica de uma equação do 1.º grau

O capítulo termina com a proposta de 13 exercícios, alguns deles com um número elevado de alíneas, e respetivas respostas. Os exercícios propostos envolvem a distinção entre *equações* e *identidades*, a verificação se determinados números são raízes de certas equações, o enunciado dos princípios de equivalência e a resolução algébrica e gráfica de equações. No grupo de exercícios *Resolução algébrica de equações*, há a destacar a presença de dois exercícios geométricos (figura 23) e, pela sua complexidade, uma equação para resolver algebricamente, que se apresenta:

$$\frac{\frac{x-3}{2}-\frac{x-2}{3}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}+\frac{\frac{x}{2}-\frac{x}{3}}{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}}=1$$


Resolução algébrica de equações

8. Resolva as seguintes equações:

a) $x+7=9$ *b)* $8-y=12$ *c)* $3z=15$ *d)* $28s=-21$ *e)* $\frac{t}{2}=3$

f) $3u=0$ *g)* $v+7=7$ *h)* $7x-4x=12$ *i)* $5y-8y=12-7$

j) $5z+10=4z+8$ *l)* $18t+4=34t-4$

9. Supondo que as rectas *AB* e *CD* da figura junta são paralelas, calcule o valor de *x*.

10. Calcule os ângulos da figura junta.

Fig. 23– Alguns exercícios do *Compêndio de Álgebra – 3.º ano* de J. J. Calado

O capítulo XII, intitulado *Equações numéricas e literais do 1.º grau a uma incógnita*, respeitante às equações numéricas do 1.º grau a uma incógnita para o 4.º ano do ensino liceal, tem cerca de 9 páginas e está dividido em duas secções que, por sua vez, estão compostas por 7 parágrafos (§§ 203 a 209). A primeira secção designa-se «Equações numéricas» e a segunda «Equações literais», ambas com pouco mais de três páginas cada. O capítulo termina com exercícios e respetivas respostas, em duas páginas.

A primeira secção inicia-se com o § 203, em que, para além de se informar que o «problema fundamental da álgebra» é a resolução de equações e que no caso especial das equações do 1.º grau a uma incógnita, esse problema consiste em transformá-la numa «equação equivalente, da forma (canónica): $ax = b$ em que a e b são números relativos ($a \neq 0$)», também relembra e acentua a importância dos princípios de equivalência. No § 204, o autor refere que as equações estudadas até então eram apenas equações inteiras e que no presente capítulo se irão estudar «certas equações, cujos termos contêm a incógnita em denominador» e que se chamam «equações fraccionárias». No entanto, avisa que o estudo apenas contemplará aquelas que forem suscetíveis de se reduzirem à forma referida no § 203. No § 205 apresenta-se a definição de equações fracionárias redutíveis a equações do 1.º grau inserida na resolução do problema: «Decompor o número 120 em duas partes que estejam entre si como 3 está para 7». No parágrafo seguinte, § 206, apresenta-se a resolução de três equações fracionárias, com a particularidade de a terceira ser uma equação impossível.

A segunda secção é formada pelos §§ 207 a 209 e diz respeito às equações literais. No § 207 refere-se a origem e significado deste tipo de equações e no § 208 apresenta-se a resolução de um problema que é uma generalização do problema resolvido no § 205. Por fim, no § 209, surge a resolução de quatro equações literais.

O capítulo encerra com oito exercícios, alguns deles com um grande número de alíneas, e respetivas respostas. Na figura 24 apresenta-se o grupo de exercícios propostos para as equações numéricas.

Equações numéricas

1. Resolva as seguintes equações:

a) $\frac{2}{15x} + \frac{1}{6x} = \frac{1}{5}$ *b)* $\frac{6}{x} - \frac{4}{3x} = \frac{3}{x} - \frac{5}{9}$ *c)* $\frac{5z - 4}{3z + 4} = \frac{9}{7}$

d) $\frac{13}{2x + 1} = \frac{17}{3x - 1}$ *e)* $\frac{u^2 - 6u + 6}{3u^2 - u + 1} = \frac{1}{3}$ *f)* $\frac{4y - 3}{2 - 3y} = \frac{8y - 9}{7 - 6y}$

g) $-x + 1 - \frac{x^2 + 3}{-x + 2} = 2$ *h)* $\frac{6x + 7}{15} + \frac{2(1 - x)}{7x - 6} = \frac{2x + 1}{5}$

i) $\frac{2}{z + 1} + \frac{5}{z - 1} = \frac{17}{z^2 - 1}$ *j)* $\frac{7}{3x^2 - x} - \frac{6}{3x^2 + x} = \frac{16}{9x^2 - 1}$

l) $\frac{3x + 8}{3x + 2} + \frac{2x - 10}{9x + 6} = \frac{6x + 10}{12x + 8} - 2$ *m)* $\frac{3}{p + 1} = \frac{p^2}{1 - p^2} + \frac{p + 1}{p - 1}$

n) $\frac{1}{2x} - \frac{1}{8 - 4x} + \frac{1}{8 + 4x} = \frac{1}{x} - \frac{3}{4 - x^2}$ *o)* $\frac{2y + 1}{2y - 1} - \frac{2y - 1}{2y + 1} = \frac{8}{4y^2 - 1}$

p) $\frac{1}{2s - 3} - \frac{3}{2s^2 - 3s} = \frac{5}{s}$ *q)* $\frac{4x - 1}{5x - 3} - \frac{36 - 5(x + 3)(2x - 1)}{9 - 25x^2} = \frac{2x + 1}{5x + 3}$

r) $\dfrac{\frac{1}{4} \cdot x + \frac{1}{2}}{\frac{3}{2} - x} + \frac{9}{10} = \dfrac{\frac{2}{5}x - \frac{1}{4}}{\frac{3}{2} - x}$

Fig. 24- Alguns exercícios do *Compêndio de Álgebra – 4.º ano* de J. J. Calado

O capítulo XX, respeitante às equações do 2.º grau a uma incógnita para o 5.º ano do ensino liceal, tem 25 páginas e tal como aconteceu para as equações do 1.º grau do 3.º ano, também está dividido em três secções que, por sua vez, estão constituídas por 15 parágrafos (§§ 299 a 313). A primeira secção designa-se «Equações numéricas» (cerca de três páginas), a segunda «Resolução algébrica» (cerca de quinze páginas) e a terceira «Equações literais» (cerca de duas páginas). O capítulo termina com exercícios e respetivas respostas (cerca de quatro páginas).

A primeira secção inicia-se com o § 299, que, como motivação e tal como aconteceu para as equações do 1.º grau, discute a origem e significado das equações do 2.º grau; refere-se o facto das equações surgirem naturalmente quando se pretende resolver problemas de domínios da geometria, física e outras ciências. Além disso, reforça-se o que havia sido referido no § 205 ao afirmar-se que «o estudo das equações [é] o objectivo fundamental dum dos ramos mais antigos da Matemática - a Álgebra». O § 300 apresenta o enunciado e respetiva resolução do seguinte problema do domínio da física: «Um avião percorre num certo tempo e com movimento uniforme a distância de 1440 km. Se a velocidade horária aumentasse de 120 km, o avião levaria menos uma hora a fazer o referido percurso. Calcule a velocidade do avião.». Este problema conduz à equação $v^2 + 120v - 172\,800 = 0$, que serve de exemplo para a definição, no § 301, de equação do 2.º grau, apresentada como «toda a equação inteira que se pode reduzir à forma (canónica) $ax^2 + bx + c = 0$ em que a, b e c são números reais quaisquer, contando que $a \neq 0$». O § 302 define equação do 2.º grau a uma incógnita incompleta e refere os três casos possíveis, quando $b = 0$, $c = 0$ e, por último, $b = 0$ e $c = 0$.

O § 303 apresenta um problema numérico que dá origem a uma equação do 2.º grau incompleta: «Qual é o número cujo quadrado é igual ao seu triplo?»

A segunda secção do capítulo, *Resolução algébrica*, inicia-se com o § 304 que apresenta a resolução de equações do 2.º grau incompletas nos três casos apresentados no parágrafo anterior: $ax^2 + c = 0$; $ax^2 + bx = 0$ e $ax^2 = 0$. Para os três casos, resolve-se a equação e dá-se duas aplicações para o primeiro caso, uma aplicação para o segundo e nenhuma para o terceiro. Os §§ 305 a 311 apresentam a resolução da equação completa, começando com casos particulares onde se reconhecem casos notáveis de multiplicação de polinómios e se dão exemplos com coeficientes numéricos. O § 309 faz a dedução da fórmula resolvente pela técnica de completar o quadrado do binómio (figura 25).

309 — Fórmula resolvente — Consideremos agora a equação

$$ax^2 + bx + c = 0$$

na qual supomos $a \neq 0$.

Para resolvermos esta equação, podemos proceder como foi indicado no número anterior e, para isso:

1) Comecemos por dividir ambos os seus membros por a — coeficiente de x^2.

Obteremos então a equação equivalente

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

2) ou

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

3) Adicionemos agora a ambos os membros da equação a expressão $\frac{b^2}{4a^2}$ — *quadrado de metade do coeficiente de* x.

Deste modo se obterá a equação

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

ou ainda

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

4) Ora o 1.º membro desta equação é o desenvolvimento do quadrado do binómio $x + \frac{b}{2a}$, donde resulta que a equação anterior se pode escrever sob a forma:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

5) Se $b^2 - 4ac$ for **positivo ou nulo**, a equação anterior é equivalente à equação:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right)^2 = 0$$

ou

$$\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0$$

donde resulta

$$x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0 \text{ e portanto } x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ou então

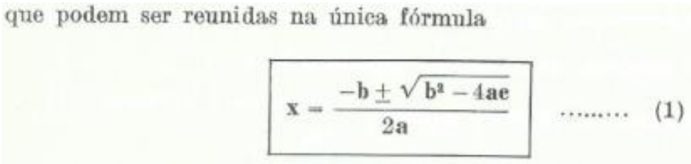
$$x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0 \text{ e portanto } x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Vemos assim que a equação

$$ax^2 + bx + c = 0$$

admite duas raízes x_1 e x_2 dadas pelas fórmulas

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$


que podem ser reunidas na única fórmula

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Fig. 25 - Dedução da fórmula resolvente no *Compêndio de Álgebra – 5.º ano* de J. J. Calado

O § 310 apresenta três exercícios resolvidos de aplicação da fórmula resolvente às equações que a seguir se transcrevem. As duas últimas são significativamente complexas.

$$2x^2 - 5x - 3 = 0 \qquad \frac{1}{x-2} + 1 - \frac{6-x}{3(x^2-4)} - \frac{1}{2-x} = 0 \qquad x(x-2) = \sqrt{3}(x-2)$$

No § 311, apresenta-se a simplificação da fórmula resolvente para os casos em que «o coeficiente *b* é um número da forma *2k*» e o «coeficiente *b* é par e o coeficiente *a* é igual a 1». Para cada um dos casos, apresenta-se uma aplicação. O § 312 chama a atenção, numa «nota importante», para a possibilidade de uma rápida resolução de certas equações do 2.º grau, dado que nem sempre é aconselhável reduzi-las à forma canónica e aplicar a fórmula resolvente se forem usadas algumas propriedades da multiplicação de polinómios. Na última frase deste parágrafo, o autor reforça a ideia ao afirmar que «em Matemática – como aliás nas demais ciências – importa não só resolver *certo* como também utilizar o processo que seja o mais *económico*».

A terceira e última secção do capítulo, *Equações literais*, é constituída por um parágrafo único, o § 313, onde se define equação literal e se resolvem as equações $y^2 = p(y+2p)$ e $dx - 2d - x^2 = -2x$, através da fórmula resolvente.

A terminar o capítulo, apresentam-se os exercícios e as respetivas respostas. São 9 os exercícios que se desdobram em numerosas alíneas e que tratam da resolução de equações do 2.º grau numéricas e literais, primeiro sem e depois com o uso da fórmula resolvente. Os primeiros exercícios são de um baixo grau de dificuldade mas os últimos são bastante complexos. Transcrevem-se, a seguir, algumas alíneas do grupo de exercícios sobre equações numéricas:

$$x^2 - 9 = 0 \qquad \frac{3y^2+1}{4y^2-9} + \frac{2y+3}{9-6y} - \frac{4y^2-4}{8y^2-18} = 0 \qquad \frac{x^2}{\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{3}x}{3} = \frac{x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

Análise

Organização e grafismo. O capítulo VI é composto por 25 parágrafos numerados (§§ 104 a 128), o capítulo XII por 7 (§§ 203 a 209) e o capítulo XX por 15 (§§ 299 a 313). Nos três capítulos, o grafismo distingue-se por não existir um único esquema, quadro ou tabela. No entanto, nos §§ 125 e 128 do capítulo VI, surgem duas representações gráficas para a resolução gráfica de equações do 1.º grau. O texto é denso, não sendo utilizada qualquer outra cor para além da preta. A letra é de tamanho reduzido e o entrelinhamento apertado.

Aspetos didáticos. No capítulo VI, sobressai o facto de ser tardia a apresentação do conceito de equação, ou seja, só surge depois de abordadas, nos capítulos anteriores, as expressões algébricas, as operações com monómios e polinómios e as frações algébricas. Os problemas do 1.º grau aparecem mais tarde num outro capítulo.

A terminologia é apresentada essencialmente no início. Diz-se que uma equação do 1.º grau a uma incógnita é a que se pode reduzir à forma $ax = b$, mas não se fala em forma canónica. A noção de identidade é fortemente valorizada (§§ 110 a 112). É muito usada a terminologia «desembaraçar de denominadores» (§ 120) e «equações inteiras» (§§ 121 a 123).

O autor indica explicitamente um procedimento algébrico para a resolução de equações (§ 124) e um outro procedimento gráfico (§ 126).

O capítulo desenvolve-se a partir de dois problemas iniciais que estão resolvidos usando um texto fluido de fácil leitura. No fim, as tarefas propostas são exercícios de vários tipos: distinção entre equação e identidade; verificação de raízes de equações, enunciado de princípios de equivalência e resolução algébrica e gráfica de equações.

Na abordagem didática nota-se o facto de o autor fazer um esforço de motivação ao falar do «objectivo fundamental da Álgebra» e dos matemáticos árabes que cunharam o termo álgebra (§ 104). É também de sublinhar que o autor inicia o assunto a partir de problemas e procura um certo equilíbrio entre as abordagens indutiva e dedutiva.

No capítulo VI relativo ao 4.º ano, dá-se continuidade ao estudo iniciado no capítulo VI do 3.º ano, referindo-se, agora, a *forma canónica* da equação que se omitiu no ano prévio. Relembra-se a terminologia *equações fracionárias* (§ 204). No problema do § 205, a resolução surge numa espécie de «diálogo com o leitor» numa sequência de várias perguntas curtas seguidas das respetivas respostas. No § 206, usa-se o mínimo múltiplo comum entre as expressões que figuram em denominador.

Na abordagem apresentada às equações do 2.º grau, no capítulo XX, reconhecem-se movimentos do particular para o geral e do geral para o particular. Exemplos do primeiro movimento são o modo como se apresenta a equação geral do 2.º grau a partir de um caso concreto e a discussão das equações incompletas antes da equação completa. Como exemplos de movimentos do geral para o particular, pode-se apontar a dedução da fórmula resolvente da equação do 2.º grau, bem como várias outras situações em que se faz uma discussão em termos gerais, seguida da apresentação de um exemplo. É de notar que o capítulo se inicia com algumas observações sobre o significado e papel das equações. O nível de formalização da linguagem é elevado, sendo apresentada uma definição explícita para o conceito de equação. Os exercícios propostos no fim do capítulo são numerosos e têm caráter matemático, envolvendo apenas a resolução de equações com e sem o uso da fórmula resolvente.

Relativamente aos exercícios propostos no final de cada um dos capítulos VI, XII e XX, observa-se um acentuado aumento do grau de dificuldade dos primeiros exercícios para os últimos.

Aspetos fenomenológicos. No que respeita às situações invocadas, o autor recorre sempre a exemplos estritamente matemáticos à exceção de 3 problemas numéricos (§§ 106, 205 e 303) e de dois exercícios geométricos propostos (exercícios 9 e 10 do capítulo VI). Existe um único exemplo formulado com elementos do quotidiano, no § 105, que é um problema de idades do João e do António. No § 299, refere-se que o estudo das equações deve a sua origem à «necessidade de resolver problemas do domínio da geometria, da física e, pode dizer-se, de todas as ciências». Com esta afirmação legitima-se o uso de um problema do domínio da física, no parágrafo seguinte (§ 300), acerca da velocidade de um avião.

No § 104, para introdução ao conceito das equações do 1.º grau, é feita uma referência ao papel das equações na álgebra e à origem histórica deste termo.

Compêndio de Álgebra de José Sebastião e Silva e José Duarte da Silva Paulo

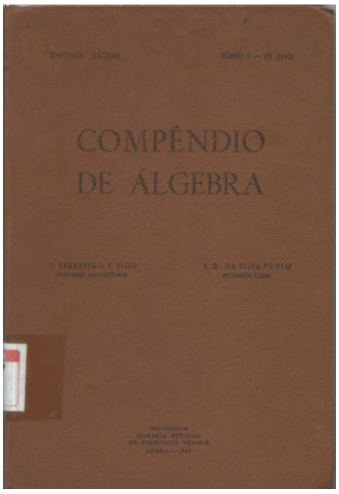


Fig. 26 - Capa do _Compêndio de Álgebra, Tomo II - VII ano_ de J. Sebastião e Silva e J. D. Silva Paulo

Trata-se de um livro publicado em 1963, sendo a depositária a Livraria Popular de Francisco Franco, em Lisboa. O livro divide-se em dois volumes – Tomo I e Tomo II – destinados aos alunos dos 6.º e 7.º anos do ensino liceal, respetivamente, e refere-se ao programa de 1954. Nas primeiras páginas, informa-se que o seu autor José Sebastião e Silva é «Professor Catedrático da Faculdade de Ciências de Lisboa» e José Duarte da Silva Paulo é «Professor efectivo do Liceu Nacional de Oeiras»; apresenta-se o número e o carimbo oficiais que atestam a aprovação deste livro como único. Na contracapa, surge o texto: «Aprovado oficialmente como livro único (Diário do Governo n.º 100, II Série, de 27 de Abril de 1963)» e a referência ao valor monetário dos volumes, que, curiosamente, são diferentes: tomo I, «PREÇO: Esc.: 17$00» e tomo II, «PREÇO: Esc.: 16$00».

Estes volumes são mais pequenos do que o anterior apresentando as dimensões de 14,5 cm por 21,7 cm, as capas são duras de cor castanho escuro e no interior o entrelinhamento é apertado ao longo das 316 e 288 páginas, respetivamente, do tomo I e do tomo II. O livro dispõe os conteúdos divididos por 23 capítulos numerados em numeração romana, que se inicia no primeiro tomo e se dá continuidade no segundo. Tal como no livro anterior analisado, destaca-se a apresentação metódica dos conteúdos organizada em parágrafos e em pontos: definição, exemplos/problemas, teorema, demonstração e no final de cada tema um número elevado de exercícios e respetivas respostas. Observa-se alguma preocupação em fazer referências históricas.

Descrição

O capítulo XIV, respeitante às equações lineares numa incógnita, tem 15 páginas e encontra-se dividido em 4 pontos. No primeiro, fornece-se as definições de *equação do 1.º grau numa incógnita*, *equação linear* e *forma canónica* de uma equação. Em seguida, os autores apresentam três equações que reduzem à forma canónica, sendo que para a primeira se obtém a solução, a segunda é impossível e a terceira é indeterminada. No ponto

2, começa-se por se dar o procedimento para a resolução gráfica de uma equação e em seguida apresenta-se a resolução gráfica de 4 equações lineares. O ponto seguinte trata de equações literais. Relativamente ao ponto 4, informa-se o aluno que «*discutir uma equação* é procurar informações qualitativas acerca das suas soluções, ainda antes de resolver efectivamente a equação» e em seguida faz-se a discussão da equação linear geral $ax+b=0$, apresentando-se no final um quadro resumo. Por fim, apresentam-se 3 exemplos de discussão de equações lineares literais com uma incógnita. O capítulo termina com 7 exercícios, alguns com alíneas, e as respetivas respostas.

O capítulo XVI, respeitante às equações do 2.º grau numa incógnita, tem 35 páginas e encontra-se dividido em 14 pontos. No primeiro, dá-se a definição de *equação do 2.º grau numa incógnita x* também chamada de *equação geral do 2.º grau em x*. No ponto 2, define-se *equação binómia do 2.º grau*, fazendo-se o estudo da equação $x^2-\alpha=0$ para quando o $\alpha \geq 0$ e $\alpha < 0$. Segue-se no ponto 3, a resolução da equação geral do 2.º grau, fazendo-se a dedução da fórmula resolvente, que se apresenta na figura 27.

3. **Resolução da equação geral do 2.º grau.** — Consideremos agora uma equação qualquer do 2.º grau

(1) $$a x^2 + b x + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

Multiplicando ambos os membros desta equação por $1/a$, obtém-se a equação equivalente

$$x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a} = 0$$

Ora vamos ver que, quaisquer que sejam os valores numéricos de a, b, c, é possível determinar dois números h e α, de modo que seja

$$x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a} = (x+h)^2 - \alpha$$

Com efeito, desenvolvendo o segundo membro virá

$$x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a} = x^2 + 2 h x + h^2 - \alpha$$

Mas isto será verdade se for (1)

$$\begin{cases} \dfrac{b}{a} = 2h \\ \dfrac{c}{a} = h^2 - \alpha \end{cases}$$

isto é, se for

(2) $$\begin{cases} h = \dfrac{b}{2a} \\ \alpha = h^2 - \dfrac{c}{a} = \dfrac{b^2}{4a^2} - \dfrac{c}{a} = \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2} \end{cases}$$

Determinados assim h e α, a equação dada reduz-se pois à *equação binómia* em $x+h$

$$(x+h)^2 - \alpha = 0 \quad \text{equivalente a} \quad (x+h)^2 = \alpha$$

e, portanto, só é verificada quando for

$$x + h = \sqrt{\alpha} \quad \text{ou} \quad x + h = -\sqrt{\alpha}$$

isto é, quando

$$x = -h + \sqrt{\alpha} \quad \text{ou} \quad x = -h - \sqrt{\alpha}$$

Designando o primeiro valor de x por x_1 e o segundo por x_2 e substituindo h e α pelas suas expressões dadas em (2), vem

$$(3) \qquad x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Chegamos assim a esta conclusão:

Quaisquer que sejam os valores dos coeficientes a, b, c $(a \neq 0)$, *a equação* (1) *admite como únicas soluções os números* x_1 *e* x_2 *dados pelas fórmulas* (3).

Estas podem ainda resumir-se na conhecida *fórmula resolvente da equação geral do 2.º grau*

$$(4) \qquad \boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Fig. 27 - Resolução da equação geral do 2.º grau no *Compêndio de Álgebra, Tomo II – VII ano* de Sebastião e Silva e Silva Paulo.

Antes de passarem ao ponto 4, os autores recordam, numa nota, a forma simplificada da fórmula resolvente. A seguir, apresentam a decomposição do trinómio do 2.º grau em fatores lineares da forma $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, em que x_1 e x_2 são as *raízes* ou *zeros do trinómio do 2.º grau* $ax^2 + bx + c$. No ponto 5, esclarecem o que acontece quando x_1 e x_2 são iguais, ou seja, quando há raízes duplas e quando, no ponto 6, as raízes são imaginárias. No ponto 7, explica-se como se constrói uma equação do 2.º grau dadas as suas raízes, seguindo-se 3 exemplos, sendo que no primeiro são dadas duas raízes reais diferentes, no segundo apenas uma, real, e no terceiro uma raiz imaginária. No ponto 8, estabelecem-se as relações entre as raízes e os coeficientes de uma equação do 2.º grau. O ponto seguinte, apresenta a resolução gráfica de qualquer equação do 2.º grau recorrendo a um sistema de duas equações, uma do 2.º grau ($y = x^2$) e outra do 1.º, conduzindo, portanto, à representação gráfica de uma parábola e de uma reta para, assim, se obter, se existir, o ponto de interseção das duas representações. Acrescenta-se o procedimento para a resolução gráfica da equação geral do 2.º grau e 3 figuras que ilustram os 3 casos possíveis (duas soluções, uma solução e sem solução). No que respeita ao ponto 10, apresenta-se a discussão das equações do 2.º grau discriminando-se em casos e em subcasos. Para o 1.º caso, tem-se $\Delta > 0$, para o 2.º caso, $\Delta = 0$ e 3.º caso, $\Delta < 0$. Os subcasos resultam de se considerar o produto P das raízes positivo, nulo ou negativo e, para alguns destes subcasos considerar-se a soma S das raízes positiva, nula ou negativa. Na figura 28 apresenta-se o resumo.

Em resumo:

$\Delta > 0$ *Duas raízes reais e diferentes*	$P > 0$	$S > 0$	*ambas positivas*
		$S < 0$	*ambas negativas*
	$P = 0$	$S > 0$	*uma nula, outra positiva*
		$S < 0$	*uma nula, outra negativa*
	$P < 0$	$S > 0$	*de sinais contrários, tendo maior módulo a positiva*
		$S < 0$	*de sinais contrários, tendo maior módulo a negativa*
		$S = 0$	*simétricas*
$\Delta = 0$ *Uma raiz real dupla*	$P > 0$	$S > 0$	*positiva*
		$S < 0$	*negativa*
	$P = 0$		*nula*
$\Delta < 0$			*Duas raízes imaginárias conjugadas.*

Fig. 28 - Resumo da discussão das equações do 2.º grau no *Compêndio de Álgebra, Tomo II – VII ano* de Sebastião e Silva e Silva Paulo.

Ainda no ponto 10, os autores fazem a discussão de 8 equações, das quais 5 são numéricas e 3 literais. Segue-se o ponto 11, marcado com um asterico para informar que se trata de um assunto facultativo, e que se refere ao comportamento das raízes quando os coeficientes tendem para determinados limites. No ponto 12, surgem 7 exemplos de aplicação aos quais os autores chamam *problemas*. Todos estes *problemas* são formulados em termos algébricos. No ponto 13, fala-se de transformação de equações e, por fim, no 14, de raiz quadrada de um número imaginário que se traduz num *problema* sobre como determinar a raiz quadrada do número $-5+12i$.

O capítulo fecha com a proposta de 13 exercícios (figura 29), quase todos desdobrados em alíneas, e as respetivas respostas.

1. Resolva as equações em x:

a) $3x^2 + 9x + 4 = 0$ b) $x^2 - \sqrt{2}x + 4/9 = 0$

c) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x} = x$ d) $\dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x+1}{x+2} = 1$

e) $x^2 - 2ax = b$ f) $x^2 + 6ax - 10a^2 = 0$

g) $\dfrac{x-m}{a-m} = \dfrac{a}{x}$

e calcule as raízes de a), b) e d) com aproximação até às centésimas.

13. Discuta e resolva as equações em x, com parâmetros reais:

*a) $x^2 - 2(m-1)x + 1 = 0$ b) $(k+1)x^2 - 2x + 2 = 0$

c) $mx^2 - 2mx + m - 1 = 0$ *d) $x^2 - 2(t+1)x + t + 1 = 0$

*e) $(u+1)x^2 - 2(u-1)x + 1 = 0$ f) $(y-2)x^2 + 2(y+1)x + y - 1 = 0$

g) $x^2 - 8x + 3t + 1 = 0$ h) $\dfrac{1}{a-x} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{x}$, $a \neq 0$.

Fig. 29- Primeiro e último exercícios relativos às equações do 2.º grau no *Compêndio de Álgebra, Tomo II – VII ano* de Sebastião e Silva e Silva Paulo.

Análise

Organização e grafismo. O capítulo XIV é composto por 4 pontos numerados (de 1 a 4) e o capítulo XVI por 14 (de 1 a 14), apresentando-se no final de cada um, os exercícios propostos com as respetivas respostas. Nos dois capítulos, contrariamente ao que acontecia no manual anterior, já existem gráficos e quadros. São utilizados dois gráficos (páginas 70 e 113) e quatro quadros (páginas 75, 76, 77 e 120). O texto é denso, não sendo utilizada qualquer outra cor para além da preta. A letra é de tamanho reduzido e o entrelinhamento apertado.

Aspetos didáticos. A terminologia é recordada e apresentada essencialmente no início de cada capítulo. Os autores indicam explicitamente um procedimento algébrico (pág. 67) e um outro procedimento gráfico (pág. 69) para a resolução das equações do 1.º grau. Fazem o mesmo para as equações do 2.º grau, indicando um procedimento algébrico na página 102 e um outro procedimento gráfico na página 111.

No final dos capítulos, os exercícios propostas são em muito menor número do que no manual anterior e abrangem todos os assuntos tratados, observando-se, também, um acentuado aumento do grau de dificuldade dos primeiros exercícios para os últimos.

Na abordagem apresentada às equações, reconhecem-se movimentos do particular para o geral e do geral para o particular. Exemplos do primeiro movimento são apenas dois, o do ponto 1 das equações do 1.º grau (pág. 66) e o do ponto 5 acerca das raízes duplas (pág. 106), em que se parte de um caso concreto para depois chegar ao caso geral. Como exemplos de movimentos do geral para o particular, pode-se apontar a dedução da fórmula resolvente da equação do 2.º grau (ponto 3 na página 102) e a discussão dos dois tipos de equação que se apresentam nos pontos 4 e 10, respetivamente, nas páginas 73 e 114. Outras situações em que se faz uma abordagem em termos gerais seguida da apresentação de um ou vários exemplos: ponto 2 (pág. 69), ponto 4 (pág. 104 e 105), ponto 7 (pág. 108). O nível de formalização da linguagem é elevado.

Salienta-se a preocupação dos autores, essencialmente aquando da discussão das equações, em fazer resumos organizados. Resolvem-se muitos exercícios de aplicação aos quais se dá o nome de *problemas*. Todos estes problemas têm cariz algébrico.

Aspetos fenomenológicos. Todas as situações trabalhadas nestes dois capítulos em análise se revestem de um caráter estritamente matemático. Todas as situações são formuladas e resolvidas em termos algébricos, exceto uma única, no exercício proposto 12 (pág. 133) onde se fala de catetos e hipotenusa de um triângulo retângulo. Não há nenhuma referência a outras ciências, nem à vida quotidiana.

Nos capítulos relativos às equações não consta nenhuma referência histórica. No entanto, os autores reservam, neste tomo, 17 páginas para duas Notas Históricas. Na primeira, com 10 páginas, faz-se uma breve resenha histórica da álgebra, começando por se referir a origem do nome, passando pela referência aos babilónios, a Diofanto, a Pedro Nunes e a Galois, entre outros. Nesta breve resenha histórica, existe referência às equações dos 2.º e 3.º graus.

***Matemática Jovem* 7, *Matemática Jovem 8* e *Matemática Jovem 9* de António Almeida Costa, Alfredo Osório dos Anjos e António Augusto Lopes**

Estes manuais escolares foram publicados pela Porto Editora em 1986 e eram destinados aos alunos dos 7.º, 8.º e 9.º anos de escolaridade. Foram, na época, manuais muito usados. Acerca dos autores, apenas existe a informação dos seus nomes, sem qualquer outra referência.

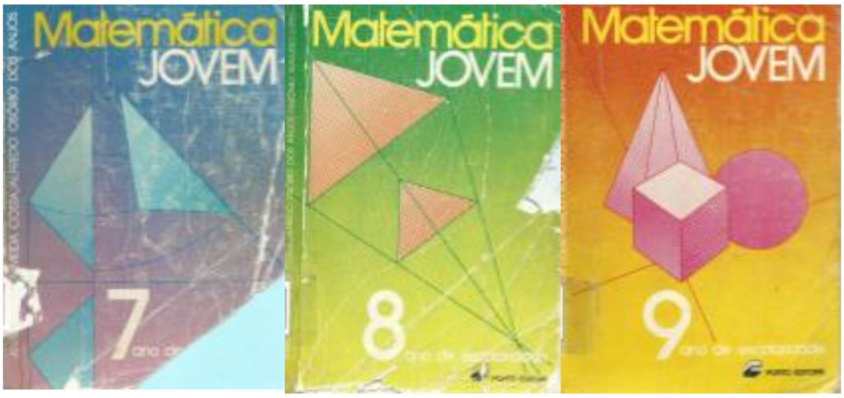


Fig. 30 - Capas dos manuais *Matemática Jovem* dos 7.º, 8.º e 9.º anos.

Os livros têm dimensões 16,5 cm por 23 cm, de capas moles e no interior o entrelinhamento é apertado ao longo das 302, 258 e 325 páginas, respetivamente, dos 7.º, 8.º e 9.º anos. Os 3 livros têm a mesma organização e grafismo apresentando-se os conteúdos divididos em capítulos que por sua vez se dividem em partes. O texto é denso, com tamanho de letra reduzido, utilizando-se na sua escrita as cores preta e azul. A cor azul é usada também nos muitos desenhos, esquemas, construções geométricas, gráficos e quadros que se observam. Também existem algumas fotografias a preto e branco (pág. 282, 7.º ano e pág. 268, 9.º ano). A primeira página de cada capítulo é sempre um índice do próprio capítulo. Observa-se a incorporação frequente de «actividades complementares» com as respetivas soluções.

Descrição

As equações do 1.º grau são apresentadas no quarto capítulo do 7.º ano e no primeiro do 8.º ano. No 7.º ano, o capítulo tem 22 páginas e título «Equações e problemas do 1.º grau». No 8.º ano, o capítulo tem 29 páginas e título «Equações do 1.º grau».

No que concerne ao manual do 7.º ano, o capítulo encontra-se dividido em cinco partes, que são «Conceito de equação» (3 páginas), «Resolução de equações» (10 páginas), um conjunto de atividades designadas por «Actividades complementares» (3 páginas), «Problemas do 1.º grau» (3 páginas) e, por fim, um outro conjunto de «Actividades complementares» (2 páginas), bem como as respetivas soluções.

A primeira parte do capítulo inicia-se com a resolução de um problema numérico a partir do qual se define equação do 1.º grau, seguindo-se-lhe as definições de «membros», «primeiro membro», «segundo membro», «termos» e «incógnita» da equação. No segundo ponto, define-se «solução da equação» partindo-se, por tentativas, da equação obtida no problema do ponto 1. No ponto 3, propõe-se um exercício que consiste em verificar se algum dos elementos do conjunto dado é raiz ou solução de 3 equações, também dadas. No ponto seguinte, os autores informam os alunos que há outro processo para descobrir as soluções de uma equação e referem o significado da expressão «a equação está resolvida».

A segunda parte é constituída por 13 pontos, que continuam a numeração da primeira parte e, onde, no ponto 5, se começa por referir as propriedades associativa e distributiva da multiplicação no conjunto dos números racionais, seguida de exercícios de aplicação no ponto 6. No ponto 7, fornecem-se duas regras práticas que são as seguintes:

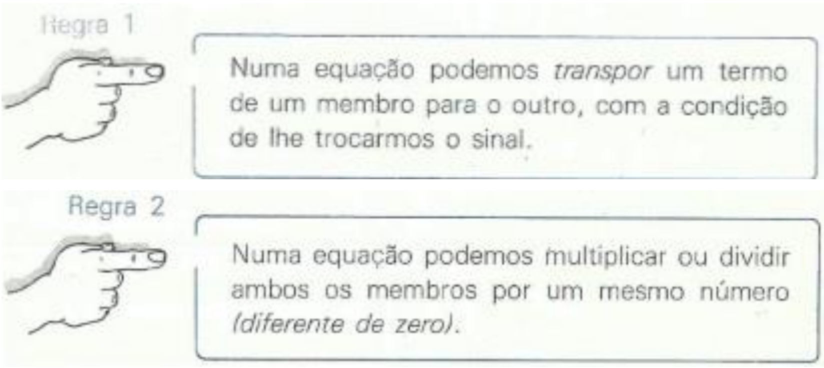


Fig. 31 - As duas regras práticas para a resolução de equações.

No ponto 8, apresenta-se um esquema para facilitar a visualização destas duas regras (figura 32).

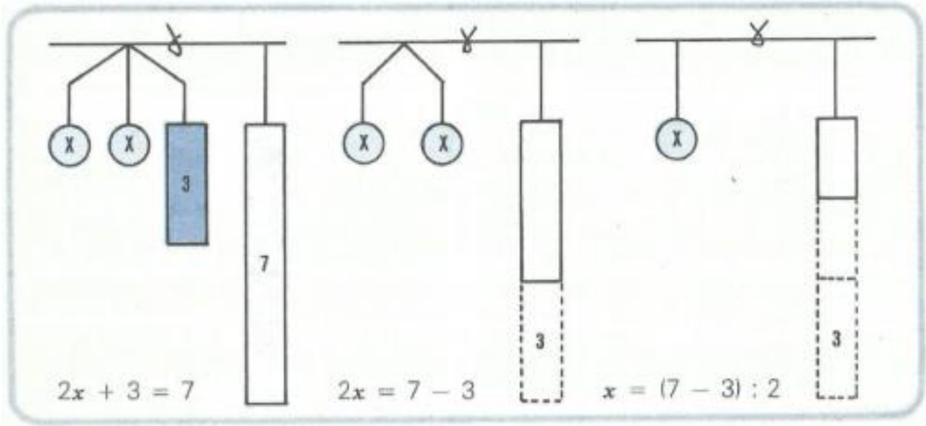


Fig. 32 - Esquema para visualização das regras práticas.

Nos pontos 9 a 11, apresentam-se problemas numéricos onde se aplicam as regras práticas na resolução das equações. Em cada um dos pontos 12 a 14, pede-se para resolver equações, agora, com denominadores, mas aplicando sempre as regras práticas dadas e conduzindo, no final do ponto 14, àquilo a que se chama *desembaraçar de denominadores* usando o mínimo múltiplo comum. Esta nova regra prática é aplicada nos pontos 15 e 16. No ponto 17, os autores fornecem um procedimento para a resolução algébrica das equações e, no fim, resolvem-se 4 equações como aplicação.

A terceira parte deste capítulo é um conjunto de 10 questões, algumas desdobradas em muitas alíneas, onde se pede diretamente para resolver equações do 1.º grau.

As quarta e quinta partes, tratam de problemas do 1.º grau.

Relativamente ao manual do 8.º ano, o capítulo referente às equações do 1.º grau, encontra-se dividido em sete partes, que são «Problemas e equações do 1.º grau» (2 páginas), «Condições equivalentes» (5 páginas), «Condições possíveis e impossíveis» (3 páginas), um conjunto de atividades designadas por «Actividades complementares» (3 páginas), «Questões de linguagem» (8 páginas), «Equações literais» (3 páginas) e, por fim, um outro conjunto de «Actividades complementares» (4 páginas), que integram as respetivas soluções.

A primeira parte do capítulo inicia-se com 2 problemas, um sobre números e outro sobre o «dinheiro do Paulo». No ponto 3, relembram-se as regras práticas para a resolução de equações já aprendidas no ano anterior e resolvem-se mais duas equações.

Na segunda parte, no ponto 4, define-se *equações equivalentes* e introduz-se o símbolo de equivalência, $\Leftrightarrow$. No ponto 5, resolvem-se 3 equações onde se evidencia o uso deste símbolo. No ponto 6, as regras práticas passam a ser chamadas de *Princípios de equivalência de equações*.

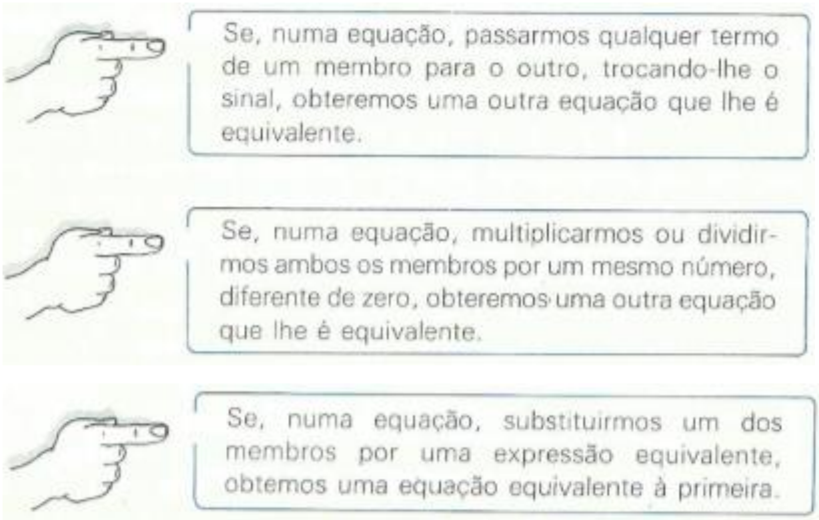


Fig. 33 - Os Princípios de equivalência.

O ponto 7 propõe exercícios de aplicação destes princípios de equivalência e o ponto seguinte refere-se a condições equivalentes.

A terceira parte inicia-se com dois problemas sobre números que conduzem, respetivamente, a uma equação sem solução, no ponto 9, e a uma equação com uma infinidade de soluções, no ponto 10. A seguir, no ponto 11, define-se condição possível, impossível e universal num dado universo, apresentando-se um resumo em forma de esquema.

Por fim, a quarta parte refere-se às atividades complementares, onde se propõem 8 exercícios desdobrados em várias alíneas. O último, em particular, tem problemas de natureza numérica e geométrica, para além de um outro sobre o número de alunos de uma escola.

As equações do 2.º grau são apresentadas no quarto capítulo do 8.º ano e no quinto do 9.º ano. No 8.º ano, o capítulo tem 40 páginas e título «Números reais». No 9.º ano, o capítulo tem 16 páginas e título «Problemas e equações do 2.º grau».

No que concerne ao manual do 8.º ano, o capítulo encontra-se dividido em nove[51] partes, sendo as equações tratadas na sétima parte intitulada «Resolução da equação $x^2 = k$, em $\mathbb{R}$», com 7 páginas. Aqui, dando-se continuidade à numeração dos pontos do

[51] As outras oito partes são: «Números racionais», «Números irracionais», «Números reais», «Operações em $\mathbb{R}^+$», «Operações em $\mathbb{R}$», dois conjuntos de «Actividades complementares» e «Apêndices».

capítulo, começa-se, no ponto 17, onde se trata da correspondência entre os pontos do plano e os pares ordenados de números reais, com base num referencial cartesiano. No ponto seguinte, estuda-se o gráfico da função $y = x^2$, definida no domínio $\mathbb{R}$, refere-se o nome da curva e a sua simetria relativamente ao eixo das ordenadas.

No ponto 19, resolve-se geometricamente a equação $x^2 = k$, recorrendo-se ao gráfico da função $y = x^2$ e a retas horizontais para resolver as equações $x^2 = 6$, $x^2 = -2$ e $x^2 = 0$ (figura 34).

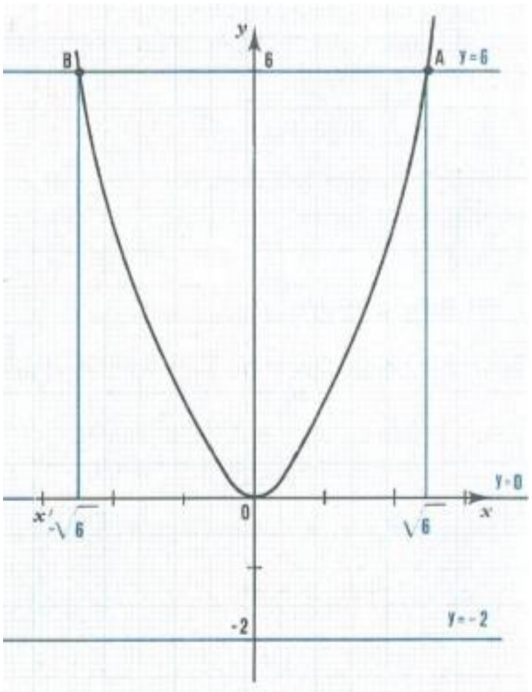


Fig. 34 - Resolução gráfica das equações $x^2 = 6$, $x^2 = -2$ e $x^2 = 0$.

O ponto 20 refere-se a uma questão de linguagem onde se esclarece que «Radical quadrático de …= Raiz quadrada não negativa de …». No ponto 21, surge a resolução algébrica de $x^2 = k$, apresentando-se um resumo. No ponto 22, resolvem-se 5 equações do tipo $x^2 = k$ por via algébrica e no ponto 23, resolve-se um problema geométrico.

Segue-se, na oitava parte do capítulo, um conjunto de «Actividades complementares» em que nas 5 primeiras e na 11.ª, se pede para resolver diretamente equações; as restantes atividades são problemas numéricos e geométricos.

1. Resolve, em IR_0^+, as seguintes equações:

a) $x^2 = 16$ *b)* $4x^2 = 0$ *c)* $4x^2 = 9$

d) $2x^2 = 18$ *e)* $2x^2 = -18$ *f)* $x^2 + 3^2 = 5^2$

g) $x^2 + (-x)^2 = 18$ *h)* $x^2 = 6,4$ (a menos de 0,01)

i) $x^2 = 1,(6)$ (a menos de 0,01) *j)* $2x^2 = \pi$ (a menos de 0,01)

2. Resolve, em IR, as seguintes equações:

a) $x^2 = \frac{1}{4}$ *b)* $x^2 = -\frac{1}{9}$ *c)* $4x^2 = \frac{1}{4}$

d) $x^2 = \frac{16}{25}$ *e)* $x^2 = \frac{121}{100}$ *f)* $x^2 = (\sqrt{3})^2$

g) $2x^2 = (\sqrt{2})^2$ *h)* $x^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2$ *i)* $x^2 = -\left(\frac{1}{2}\right)^2$

Fig. 35 - Os dois primeiros exercícios.

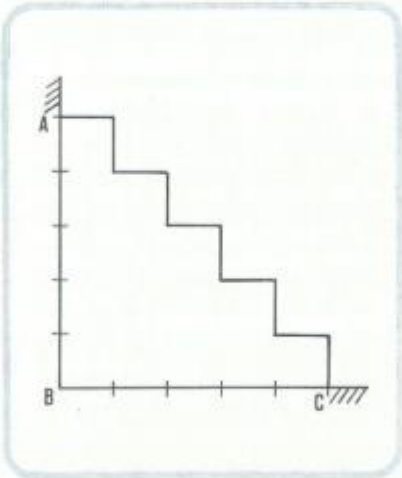
6. Resolve os problemas seguintes:

a) Determinar dois números inteiros consecutivos, sabendo que a soma dos seus quadrados é igual ao dobro do maior deles.

b) Determinar dois números inteiros consecutivos, sabendo que é 73 a diferença entre a soma dos seus quadrados e o dobro do menor deles.

Fig. 36 - Os dois primeiros problemas.

8. No polígono da figura, em que cada lado é perpendicular aos dois consecutivos, sabe-se que os lados [AB] e [BC] são geometricamente iguais, o mesmo sucedendo entre todos os restantes.



Calcula o comprimento de cada um dos lados, sabendo que a área do polígono é 60 cm^2.

Fig. 37 - Um dos problemas propostos.

No manual do 9.º ano, as equações do 2.º grau são apresentadas no capítulo 5 que se encontra dividido em quatro partes, começando com «Equações do 2.º grau em $\mathbb{R}$» (8 páginas) e «Problemas do 2.º grau» (2 páginas), a que se segue um conjunto de atividades designadas por «Actividades complementares» (3 páginas) e um outro conjunto intitulado «Actividades de revisão» (2 páginas), que integram as respetivas soluções.

A primeira parte do capítulo inicia-se com a resolução de um problema numérico a partir do qual se define equação do 2.º grau, seguindo-se-lhe uma tabela em que estão reunidas sete equações dos 1.º e 2.º graus, indicando, para cada uma, os coeficientes do polinómio do 1.º membro. Nos segundo, terceiro e quarto pontos resolvem-se equações do tipo $ax^2+c=0$, no quinto ponto equações do tipo $ax^2+bx=0$, no sexto ponto equações do tipo $ax^2+bx+c=0$ recorrendo aos casos notáveis da multiplicação e, finalmente, no sétimo ponto apresenta-se a dedução da fórmula resolvente (figura 38) que é seguida da aplicação em dois exercícios.

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$
$$\Leftrightarrow x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}}$$
$$\Leftrightarrow x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}$$
$$\Leftrightarrow x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Vamos reter esta fórmula:

$$x=\frac{-\boxed{\text{coeficiente de } x}\pm\sqrt{\boxed{\text{quadrado do coeficiente de } x}-\boxed{\text{quatro vezes o produto do coeficiente de } x^2 \text{ pelo termo independente}}}}{\boxed{2 \text{ vezes o coeficiente de } x^2}}$$

Fig. 38 - Dedução da fórmula resolvente.

O oitavo ponto sintetiza os vários tipos de equações do 2.º grau e a sua resolução e possibilidade em $\mathbb{R}$, fazendo, ainda, referência ao caso em que o coeficiente *b* é par e apresentando a fórmula resolvente na forma simplificada.

Na segunda parte trata-se de «Problemas do 2.º grau». Na terceira parte, intitulada «Actividades complementares», propõe-se a resolução de dez questões desdobradas em várias alíneas, seguindo-se-lhe as respetivas soluções. As 9 primeiras questões envolvem a resolução direta de equações e a última é acerca de problemas (figuras 39 e 40).

1. Resolver as equações em $\mathbb{R}$:

a) $x^2-49=0$ *b)* $x^2-27=0$ *c)* $x^2=63$

d) $x^2+9=0$ *e)* $1000=x^2$ *f)* $x^2-3^2=4^2$.

2. Verificar que, em $\mathbb{R}$:

a) $x^2=4 \Leftrightarrow x=2 \vee x=-2$ *b)* $x^2=0{,}64 \Leftrightarrow x=0{,}8 \vee x=-0{,}8$

c) $x^2=12 \Leftrightarrow x=2\sqrt{3} \vee x=-2\sqrt{3}$ *d)* $x^2=-14 \Leftrightarrow x^2=-1$.

3. Resolver, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações:

a) $x^2-7x=0$ *b)* $x^2+7x=0$ *c)* $3x^2-2x=0$

d) $4x^2=10x$ *e)* $x^2-2{,}5x=0$ *f)* $x^2=x$

g) $0{,}1x^2-0{,}01x=0$.

Fig. 39 - Os três primeiros exercícios sobre equações do 2.º grau.

8. Resolver, em IR, as equações seguintes:

a) $5x^2 - 50x + 80 = 0$ *b)* $2x^2 + 24x + 70 = 0$

c) $0{,}6x^2 - 2x - 5 = 0$ *d)* $0{,}7x^2 - x + 0{,}3 = 0$

e) $(x + 4)(x + 5) - 3x = 27$ *f)* $x(x - 6) = 16$

g) $(x - 2)(x + 5) = 22 - x$ *h)* $(x - 4)^2 + (x - 1)(x + 1) = 25$

*i)** $\frac{6}{x} - 5 = x$ *j)** $x - \frac{3}{x - 1} = 3.$

9. Verificar que:

a) $x^2 + (x + 2)^2 = 10^2 \Leftrightarrow x = 6 \vee x = -8$

b) $x(2x - 1) = (x + 1)^2 + 3 \Leftrightarrow x = 4 \vee x = -1.$

Fig. 40 - Os dois últimos exercícios sobre equações do 2.º grau.

O asterisco que consta nas duas últimas alíneas da questão 8 serve para informar os alunos do seu caráter facultativo (pág. 3, 9.º ano).

O capítulo finaliza com as «Actividades de revisão», onde se apresentam questões que envolvem matérias anteriores como inequações, sistemas, decomposição de polinómios em fatores, resolução de equações, resolução de problemas e simplificação de radicais.

Análise

Organização e grafismo. Ao contrário do observado nos manuais anteriores analisados, nestes, os capítulos não se dividem em parágrafos numerados, sendo os diversos assuntos, referentes às equações, identificados por pontos, de 1 a 17 (4.º capítulo, 7.º ano), de 1 a 26 (1.º capítulo, 8.º ano), de 1 a 23 (4.º capítulo, 8.º ano) e de 1 a 12 (5.º capítulo, 9.º ano). O texto desenvolve-se num registo que mistura a linguagem natural (muito abreviada) com linguagem algébrica (dominante), usando-se, com muita frequência nos 8.º e 9. anos, os símbolos $\Leftrightarrow$ e $\vee$. O entrelinhamento é reduzido e o grafismo continua sóbrio, surgindo a cor azul forte para certos subtítulos e a azul fraco para diversas frases e enunciados. De forma mais acentuada que no manual anterior, estes apresentam desenhos (telefone a tocar e mãos a apontar), quadros (pág. 116 e 117, 7.º ano), esquemas (pág. 118, 7.º ano; pág. 15, 8.º ano; pág. 117, 8.º ano), gráficos (pág. 118, 119 e 120, 8.º ano), uma tabela (pág. 136, 9.º ano). Em praticamente todas as páginas, usam-se caixas retangulares cujos limites são de cor azul.

Observa-se a incorporação frequente de «actividades complementares» e as respetivas soluções.

Aspetos didáticos. Na abordagem às equações do 1.º grau, no 7.º ano, surge logo no inicio, feita a partir de um problema, a definição de *equação* e a terminologia: «membros», «primeiro membro», «segundo membro», «termos» e «incógnita» de uma equação (pág. 112 e 113, 7.º ano). Também a equação do 2.º grau é definida de forma direta logo na primeira página do capítulo (pág. 136, 9.º ano) estabelecendo-se assim, uma abordagem do geral para o particular. Exemplo da abordagem do particular para o geral, seguida do geral para o particular é o da introdução das regras práticas para a resolução de equações do 1.º grau (pág. 116 a 123, 7.º ano).

Tal como os manuais anteriores, a apresentação deste é condensada e a sua abordagem envolve um nível de abstração e formalização elevado – em particular, a dedução da fórmula resolvente é feita de modo extremamente abreviado. Não surge o termo «exercício», que é substituído pelo termo «actividade». Curiosamente, não se denomina as equações $ax^2+bx=0$ e $ax^2+c=0$ como *incompletas*, mas sim como equações «com aspecto mais simples» (pág. 136, 9.º ano). Os símbolos de equivalência, $\Leftrightarrow$, e da disjunção, $\vee$, apenas são dados a conhecer aos alunos no 8.º ano, passando a ser profusamente usados. Introduzem-se, no 7.º ano, os termos «regras práticas» para depois no 8.º ano se falar nos «Princípios de equivalência» (pág. 10, 8.º ano). Também é só no 8.º ano que surgem as equações com denominadores. Observam-se situações de diálogo com os alunos aquando da abordagem das equações do 1.º grau, no 8.º ano.

Nota-se a preocupação dos autores em incorporar «actividades complementares» e as respetivas soluções, como um processo de avaliação, por parte dos alunos, dos conhecimentos assimilados e hipótese da sua consolidação.

Aspetos fenomenológicos. Nestas páginas analisadas, a grande maioria das situações invocadas são de natureza estritamente matemática. Há problemas numéricos (pág. 112, 7.º ano; pág. 136, 9.º ano) e problemas geométricos (pág. 123, 8.º ano). Nas atividades complementares das páginas 124 a 126 existem muitos exercícios de natureza numérica e geométrica.

Observa-se apenas duas situações do quotidiano, uma que envolve dinheiro (pág. 6, 8.º ano) e outra que é um exercício proposto que menciona o número de alunos de uma escola (pág. 17, 8.º ano).

Na abordagem às equações dos 1.º e 2.º graus, não há nenhuma referência a outras ciências ou a elementos históricos.

***Compêndio de Matemática* de Madalena Garcia, Alfredo Osório e António Ruivo**

Este manual foi publicado pela Porto Editora em 1980 e era destinado aos alunos do 10.º ano de escolaridade, antigo 1.º ano do curso complementar com matemática moderna – Programa de 1974/1975. Acerca dos autores, apenas existe a informação dos seus nomes, sem qualquer outra referência.

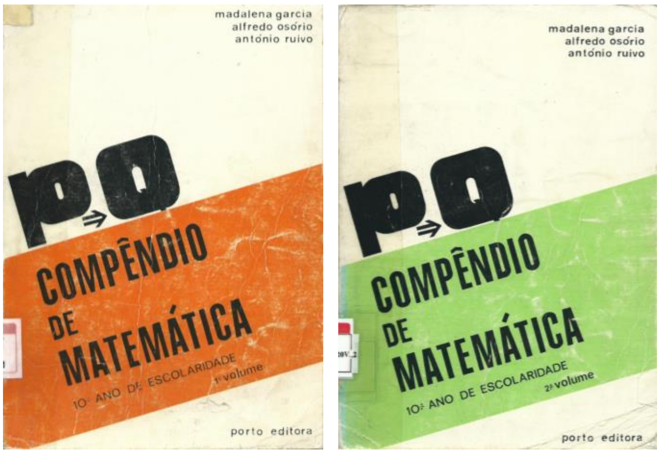


Fig. 41 - Capa dos dois volumes do *Compêndio de Matemática* de Madalena Garcia, Alfredo Osório e António Ruivo

O livro era composto por dois volumes, que têm as mesmas dimensões que o manual anterior (16,5 cm por 23 cm), de capas moles e no interior o entrelinhamento é apertado ao longo das 141 e 240 páginas, respetivamente, do 1.º e do 2.º volumes. Os conteúdos deste manual apresentam-se divididos em capítulos, que por sua vez se dividem em pontos e alguns em subpontos.

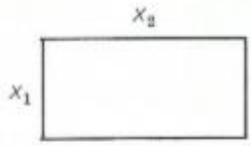
Descrição

As equações do 1.º grau surgem referidas no primeiro volume, no capítulo com o título «Equações e inequações» (11 páginas). O capítulo encontra-se dividido em 3 partes, começando com «Princípios de equivalência» (uma página e meia), «Resolução de equações» (2 páginas) e «Resolução de inequações» (5 páginas e meia), a que se segue um conjunto de exercícios e respetivas soluções, em duas páginas. No primeiro ponto, apresenta-se, em paralelo, a resolução da equação $5(1-3x)=7$ e da inequação $5(1-3x)<7$ e em seguida os 3 princípios de equivalência. No ponto 2, resolvem-se 3 equações de grau superior ao segundo, usando a decomposição de polinómios em fatores e a lei do anulamento do produto, e uma equação fracionária. O ponto 3 é relativo a inequações. No final do capítulo, surgem 4 exercícios desdobrados em várias alíneas e as respetivas soluções. Pede-se para resolver em $\mathbb{R}$ várias equações de grau superior ao 2.º, no primeiro exercício e equações fracionárias, no segundo. Os restantes são sobre inequações.

As equações do 2.º grau surgem referidas no segundo volume, integradas no capítulo com o título «Funções polinomiais» (37 páginas). O capítulo encontra-se dividido em 6 pontos, sendo os dois últimos relativos às equações. Em pouco mais de uma página, desenvolve-se o ponto 5 – Soma e produto das raízes de uma equação do 2.º grau – no qual os autores mostram que se pode «determinar uma equação do 2.º grau conhecida a soma S e o produto P das raízes» e, em seguida, apresentam como exemplo um problema geométrico (figura 42)

Um exemplo de aplicação das fórmulas

Suponhamos que se pretende determinar uma equação do 2.º grau cujas raízes sejam as medidas dos lados dum rectângulo de perímetro p e área s.



Da figura conclui-se que

$$2x_1 + 2x_2 = p \Leftrightarrow x_1 + x_2 = \frac{p}{2}$$
$$x_1 \, x_2 = s$$

Por consequência, $x^2 - \frac{p}{2}x + s = 0$ é uma solução do problema.

Fig. 42- Problema no *Compêndio de Matemática* de Madalena Garcia, Alfredo Osório e António Ruivo.

O ponto 6 – Problemas do 1.º e 2.º grau – aparece em cerca de 10 páginas e dividido em 2 subpontos. No subponto 6.1., intitulado «Discussão de uma equação de grau não superior ao segundo» (3 páginas), começa-se por resolver o problema: «Daqui a 12 anos, o Paulo terá o dobro da idade que tem hoje. Qual é a idade actual do Paulo?». Em seguida, apresenta-se a discussão das equações do 1.º e 2.º graus, assim resumidas:

A equação $ax = b$ com $a \neq 0$ tem sempre uma única solução, sendo

$x = 0$	sse	$b = 0$	
$x > 0$	sse	b e a	tiverem o mesmo sinal
$x < 0$	sse	b e a	tiverem sinais diferentes.

Fig. 43 - Resumo da discussão da equação do 1.º grau.

$\triangle < 0$ a equação é impossível

$\triangle = 0$ a equação tem uma raiz dupla igual a $-\dfrac{b}{2a}$

$$\begin{matrix} \triangle > 0 \\ \begin{pmatrix} \text{então} \\ x_1 \neq x_2 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{cases} P = 0 \quad x_1 = 0 \quad x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ P > 0 \quad \begin{cases} S > 0 & \text{as raízes são ambas positivas.} \\ S < 0 & \text{as raízes são ambas negativas.} \end{cases} \\ P < 0 \quad \text{uma das raízes é positiva e a outra negativa.} \end{cases}$$

Fig. 44 - Resumo da discussão da equação do 2.º grau.

Segue-se o subponto «Problemas» (7 páginas) e a fechar o capítulo surgem 12 exercícios com as respetivas soluções. O primeiro exercício, com 3 alíneas, pede para escrever uma equação do 2.º grau dadas as raízes e os restantes 11 são problemas.

Análise

Organização e grafismo. Os assuntos estão organizados em pontos numerados (e alguns destes em subpontos), apresentando-se no final de cada capítulo os exercícios propostos e as respetivas soluções. Neste manual, na abordagem das equações, não foi usado qualquer gráfico, quadro ou esquema. O texto é denso, não sendo utilizada para a sua escrita, qualquer outra cor para além da preta. No entanto, usam-se «caixas» com fundo de cor verde para destacar os princípios de equivalência. A letra é de tamanho reduzido e o entrelinhamento apertado.

Aspetos didáticos. Na abordagem apresentada às equações, todas as situações partem do particular para o geral, ou seja, parte-se de um caso concreto para depois chegar ao caso geral. A resolução da equação e da inequação (ponto 1, pág. 96, 1.º volume) serve essencialmente para relembrar os princípios de equivalência com o objetivo de estes serem escritos usando a nova linguagem da lógica matemática. O nível de formalização da linguagem é elevado. Usa-se a expressão «sse» e existem perguntas ao aluno «Porquê?» para justificação de alguns passos. No ponto 2 (página 97, 1.º volume), para resolver as equações de grau superior ao 2.º, usa-se a lei do anulamento do produto sem, no entanto, se referir o seu nome. Salienta-se a preocupação dos autores, essencialmente aquando da discussão das equações, em fazer resumos. As respostas dos exercícios chamam-se, tal como no manual anterior, soluções.

É de notar que já não se trata de um livro de álgebra, mas sim de matemática. Está, portanto, a álgebra integrada na matemática.

Aspetos fenomenológicos. Todas as situações analisadas se revestem de um caráter estritamente matemático. Existe um problema geométrico e um problema de idades (ambos na pág. 193, 2.º volume). Não há nenhuma menção a outras ciências, nem referências históricas.

Matemática 7**,** ***Matemática 8*** **e** ***Matemática 9*** **de Maria Augusta Ferreira Neves, Luís Guerreiro e Armando Neves**

Fig. 45 - Capas dos manuais do 7.º ano (2.ª parte), 8.º ano (1.ª e 2.ª partes) e 9.º ano (1.ª parte).

Estes manuais foram publicados pela Porto Editora em 2002, 2009 e 2008 para os 7.º, 8.º e 9.º anos de escolaridade, respetivamente. Trata-se dos manuais mais usados nas escolas portuguesas, senão mesmo os mais usados, na época. Acerca dos autores, não é feita qualquer referência para além dos seus nomes. São manuais de formato maior do que todos os anteriores, com dimensões 21,5 cm por 28,5 cm. Na capa surge sempre uma fotografia e no interior são visíveis muitos desenhos, esquemas, quadros, tabelas, gráficos e fotografias recheados de muitas cores, resultado de uma grande produção gráfica.

Para cada um dos 3 anos de escolaridade, o manual é constituído por duas partes organizadas em capítulos. Cada capítulo inicia-se com um separador de duas páginas onde, na primeira, se indica as várias secções em que o capítulo está dividido e «o que é preciso saber» por parte do aluno e, na segunda, se apresenta uma «Nota histórica». Tanto na capa dos manuais como na primeira página dos separadores, existe referência a «@poio na Internet» fornecendo-se a respetiva morada virtual. Cada uma das secções em que os capítulos estão divididos, apresenta, em 2 páginas, uma explicação do respetivo tópico, diversos exemplos resolvidos de questões relativas a esse tópico e uma pequena «Síntese» de várias linhas a que se segue um conjunto de «Problemas propostos» (também 2 páginas), o último dos quais apresentado como «Reflexão/Discussão». Os capítulos terminam com duas secções designadas «palavras-chave / conhecimentos e capacidades específicos», em 2 páginas, e «Avaliação», em 4 páginas, sendo as duas primeiras, «Questões de escolha múltipla» e as outras duas, «Questões de desenvolvimento».

No final de cada uma das partes são apresentadas, em conjunto, as soluções de todas as questões propostas em todos os capítulos dessa parte, à exceção das questões de escolha múltipla.

Descrição

As equações do 1.º grau são apresentadas no quarto capítulo do manual do 7.º ano e no primeiro do 8.º ano.

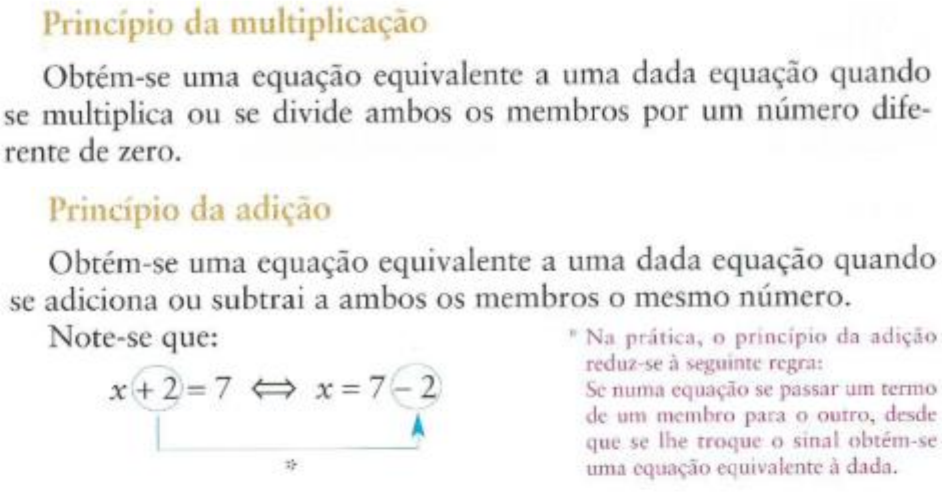
No 7.º ano, o capítulo ocupa 48 das 144 páginas do livro e tem o título «Equações». Está dividido em 10 secções: «1. Utilização e escrita simplificada de fórmulas», «2. Sequências», «3. Expressões com letras: uma letra para representar um número desconhecido», «4. Simplificação de expressões com letras», «5. Introdução ao estudo das equações», «6. Equações e problemas», «7. Classificação de equações. Equações equivalentes», «8. Resolução de uma equação: princípios da adição e da multiplicação», «9. Equações com parênteses» e «10. Resolução de problemas usando equações».

A «Nota histórica» que surge na segunda página do separador, refere a importância da utilização de letras na matemática fazendo-se referência a Euclides, Viète e Stifel. O capítulo inicia-se com quatro secções relativas a expressões com letras. Em seguida, na quinta secção, introduz-se o estudo das equações apresentando-se um esquema que representa uma balança em equilíbrio e refere-se que, em álgebra, a situação apresentada pode ser escrita por $x + x = 100$. A partir deste exemplo identifica-se equação, incógnita, solução ou raiz, membros e termos de uma equação. Em seguida, apresenta-se um exemplo com o mesmo tipo de esquema e um segundo onde se completam espaços.

A secção termina com 3 «Problemas propostos» desdobrados em várias alíneas. O primeiro exercício apresenta um exemplo seguido de 4 alíneas onde se pede para descobrir o peso dos frascos que surgem em cada uma das imagens apresentadas. No segundo exercício, pede-se para escrever e resolver equações muito simples. O último, «Reflexão/Discussão» é um problema geométrico onde se pede para escrever uma equação e identificar as suas partes.

A sexta secção diz respeito à resolução de problemas do 1.º grau. Na sétima secção, dá-se a classificação de equações a partir de um problema geométrico e define-se *equações equivalentes*, aproveitando-se para introduzir o símbolo de equivalência, ⇔, entre duas equações. A secção termina com 6 «Problemas propostos» desdobrados em várias alíneas onde, nos quatro primeiros, se pede para escrever e classificar equações, escrever uma equação equivalente à dada, identificar equações equivalentes, impossíveis e possíveis e indeterminadas. No 5.º exercício, surge a representação de 6 triângulos, perguntando-se se podem ser equiláteros. Na última, «Reflexão/Discussão», pede-se para escrever uma equação impossível e outra possível e indeterminada, usando os dados da questão 5.

A oitava secção começa por informar o aluno que «Resolver uma equação é encontrar o valor da incógnita». Em seguida, surgem fotografias de balanças equilibradas e representa-se simbolicamente, através de uma equação, cada uma das situações apresentadas. A partir destas situações são dados os «Princípio da multiplicação» e «Princípio da adição» (figura 46).


Princípio da multiplicação

Obtém-se uma equação equivalente a uma dada equação quando se multiplica ou se divide ambos os membros por um número diferente de zero.

Princípio da adição

Obtém-se uma equação equivalente a uma dada equação quando se adiciona ou subtrai a ambos os membros o mesmo número.

Note-se que:

$$x + 2 = 7 \Leftrightarrow x = 7 - 2$$

*

* Na prática, o princípio da adição reduz-se à seguinte regra: Se numa equação se passar um termo de um membro para o outro, desde que se lhe troque o sinal obtém-se uma equação equivalente à dada.

Fig. 46 - Os princípios da multiplicação e da adição.

Na «Síntese» apresenta-se um método prático, por passos, de resolução de uma equação. A secção termina com 6 «Problemas propostos» desdobrados em várias alíneas. Os 3 primeiros são para aplicação direta dos princípios da multiplicação e da adição, o quarto para resolver 12 equações e no quinto, surge um «Trabalho para dois» que é uma atividade de *números cruzados*. Na última, «Reflexão/Discussão», pede-se para escrever uma «equação do tipo $ax+b=cx+d$ cuja solução seja 3» e explicar como se procedeu.

A nona secção apresenta um exemplo de resolução de uma equação com parênteses, apresentando um método prático. Antes, explica-se através de exemplos como se deve proceder para tirar os parênteses a expressões quando são precedidos pelo sinal +, $-$ ou $\times$. Na «Síntese», apresenta-se exemplos de expressões com parênteses precedidos do sinal $+$, $-$ ou $\times$. A secção termina com 6 «Problemas propostos». Pede-se nos dois primeiros para simplificar expressões com parênteses e no terceiro para resolver 10 equações com parênteses. Os 4.º e 5.º são problemas geométricos e o último, «Reflexão/Discussão», é um jogo de idades.

O capítulo apresenta, ainda, uma síntese da matéria com «competências, conhecimentos e capacidades específicas» e sugestões para trabalhos de projeto ou de grupo. As duas sugestões prevêem a utilização das novas tecnologias, com o uso da folha de cálculo e da programação em Visual Basic. A encerrar o capítulo, a secção «Avaliação» é constituída por 9 questões de escolha múltipla e outras 9 de desenvolvimento, que tanto incluem resolução de equações do 1.º grau como problemas para resolver (figura 47).

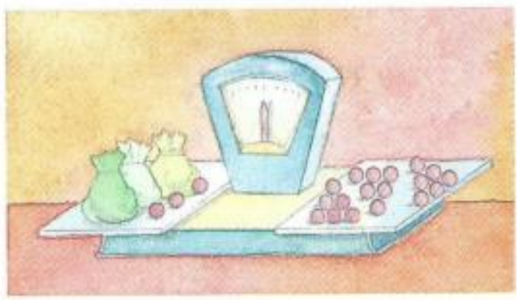
4. Observe o esquema.

Em cada saco há x bolas iguais às que estão representadas na figura.

O peso dos sacos é muito pequeno e como tal não é considerado na resolução do problema.

4.1. Escreva uma equação sugerida pela figura.

4.2. Quantas bolas tem cada saco?



5. Resolva cada uma das seguintes equações:

5.1. $a-2=-0{,}5$;	**5.2.** $-3=6t$;
5.3. $2a+7=5$;	**5.4.** $-2x+3=5x-1$;
5.5. $3x-0{,}2x=0$;	**5.6.** $1-2\,(x-3)=0$;
5.7. $1-(x+3)=-2\,(1-3x)$;	**5.8.** $1+(-x+3)=2-(x+1)$;
5.9. $-0{,}5\,(x-4)=-0{,}5+x$;	**5.10.** $1-(2-x)=5-3\,(x+0{,}1)$.

Fig. 47 - As questões 4 e 5 de desenvolvimento.

No 8.º ano, o capítulo ocupa 47 das 176 páginas do livro e tem título «Equações do 1.º grau. Equações do tipo $ax^2 = b$, $a \neq 0$». Está dividido em 10 secções: «1. Constantes e variáveis. Simplificação de expressões com termos semelhantes (revisão)», «2. Expressões com parênteses. Simplificação de expressões com parênteses (revisão)», «3. Simplificação de expressões multiplicando ou dividindo números negativos (revisão)», «4. Equações e problemas (revisão)», «5. Equações. Princípios de equivalência (revisão)», «6. Equações com parênteses (revisão)», «7. Equações com fracções», «8. Equações com fracções. M.m.c. e m.d.c. de dois ou mais números», «9. Equações literais» e «10. Resolução de equações do tipo $ax^2 = b$, $a \neq 0$».

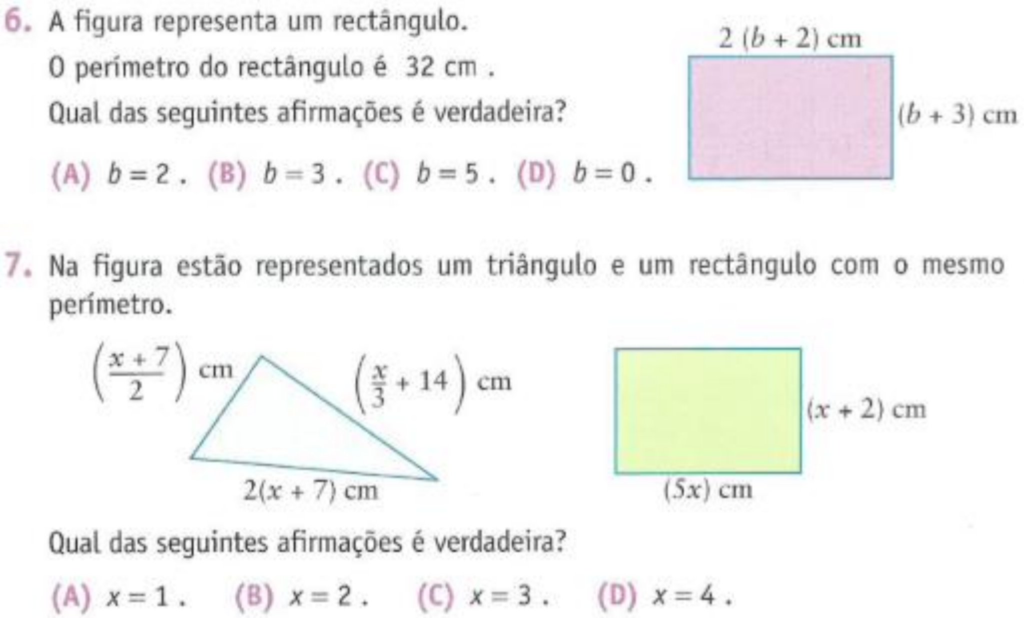
A «Nota histórica» localizada na margem da segunda página do separador, refere-se à matemática no antigo Egito e apresenta um dos problemas escritos nos papiros. O capítulo inicia-se com seis secções de revisões de assuntos já conhecidos dos alunos. Em seguida, na sétima secção introduz-se, através de dois problemas, um de números e outro acerca de uma visita de estudo, as equações com frações. Na «Síntese», dá-se dois modos diferentes para resolver equações com frações. A secção termina com 6 «Problemas propostos» desdobrados em várias alíneas. Nos primeiro e quarto exercícios, pede-se diretamente para resolver equações com frações. Nos segundo e terceiro, representa-se ângulos e triângulos, respetivamente, com o objetivo de se formar e resolver uma equação para cada uma das situações. No quinto exercício, propõe-se dois problemas, um sobre o volume de água de um garrafão e outro sobre o dinheiro do Pedro. No último, «Reflexão/Discussão», pede-se para resolver 2 equações com parênteses e frações, depois de se apresentar a resolução de uma equação com as mesmas características.

A oitava secção diz respeito à resolução de equações do 1.º grau com frações, onde se refere a utilidade da decomposição em fatores primos dos denominadores para o cálculo do mínimo múltiplo comum (m.m.c). Para isso, apresenta-se um exemplo que consiste na resolução da equação $\frac{x}{78} - 1 = \frac{3}{120}$, calculando-se o m.m.c.(78, 120). Em seguida, e também a partir de um exemplo, mostra-se como se usa o máximo divisor comum (m.d.c.) de dois números para se simplificar uma fração obtendo uma fração irredutível equivalente à dada.

A secção termina com 5 «Problemas propostos» desdobrados em várias alíneas. No primeiro exercício, pede-se para determinar o m.m.c. e m.d.c. de dois ou mais números.

Nos segundo e terceiro, pede-se para resolver equações do 1.º grau com parênteses e/ou frações. No quarto, propõe-se 4 problemas para usar a noção de m.m.c. e m.d.c.. No último, «Reflexão/Discussão», pede-se para copiar e completar uma tabela que tem como objetivo levar o aluno a encontrar uma regra que relacione o produto de um dado par de números com o m.d.c. e o m.m.c. desses números.

O capítulo apresenta, no final, uma síntese da matéria, com palavras-chave e conhecimentos e capacidades específicas. A encerrar, a secção «Avaliação» tem 9 questões de escolha múltipla e 9 de desenvolvimento, que tanto incluem equações como problemas para resolver (figuras 48 e 49).



6. A figura representa um rectângulo.
O perímetro do rectângulo é 32 cm .
Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) $b = 2$. **(B)** $b = 3$. **(C)** $b = 5$. **(D)** $b = 0$.

7. Na figura estão representados um triângulo e um rectângulo com o mesmo perímetro.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) $x = 1$. **(B)** $x = 2$. **(C)** $x = 3$. **(D)** $x = 4$.

Fig. 48 - Algumas questões de escolha múltipla.

6. A pescaria

O Mário, o Pedro e o Alexandre foram pescar.

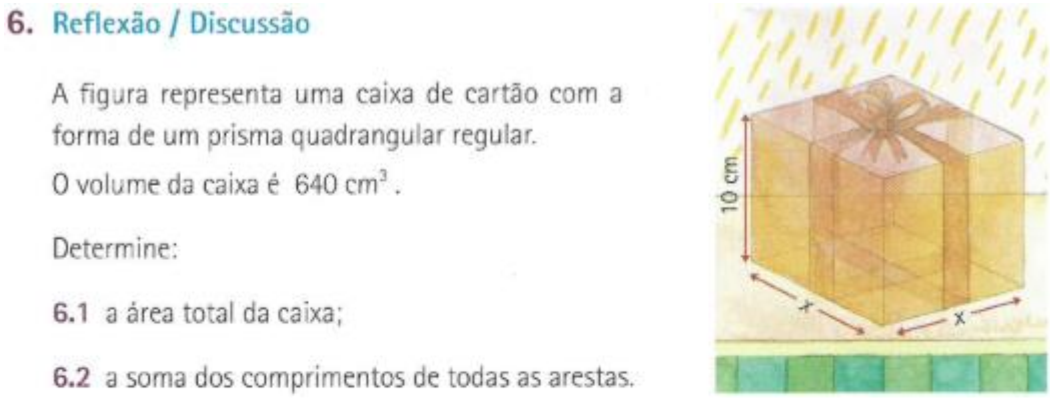
O Mário pescou $\frac{1}{5}$ dos peixes, o Pedro $\frac{1}{3}$ e o Alexandre pescou 70 peixes.

Quantos peixes pescaram ao todo?

Fig. 49 - Um dos problemas propostos.

As equações do 2.º grau são apresentadas nos primeiro e quinto capítulos do manual do 8.º ano e no quarto do 9.º ano.

No 8.º ano, o primeiro capítulo tem 47 páginas, título «Equações do 1.º grau. Equações do tipo $ax^2 = b$, $a \neq 0$» e está dividido em 10 secções, como já foi referido anteriormente. A única secção que se refere às equações do 2.º grau é a última: «Resolução de equações do tipo $ax^2 = b$, $a \neq 0$». Nesta secção, introduz-se através de dois problemas geométricos (área de quadrados), as equações do tipo $ax^2 = b$ em que a e b são constantes e $a \neq 0$. Chama-se a atenção para o número de casas decimais que se devem usar para responder adequadamente a cada situação. De seguida, surge a resolução das equações $9x^2 = 25$ e $7x^2 = 15$. A secção termina com 6 «Problemas propostos» desdobrados em várias alíneas. Os dois primeiros exercícios são de resolução de equações do tipo $ax^2 = b$, com e sem calculadora. Os terceiro e quinto são problemas geométricos. No quarto, propõe-se 3 problemas de números para equacionar e resolver. O último, «Reflexão/Discussão», é o problema que se apresenta na figura 50.


6. Reflexão / Discussão

A figura representa uma caixa de cartão com a forma de um prisma quadrangular regular.
O volume da caixa é 640 cm^3.

Determine:

6.1 a área total da caixa;

6.2 a soma dos comprimentos de todas as arestas.

Fig. 50 – Problema proposto 6 - «Reflexão/Discussão».

As equações do 2.º grau são, ainda, apresentadas no capítulo 5, «Polinómios e equações», do manual do 8.º ano, em 44 das 144 páginas do livro. São 9 as secções em que está dividido este capítulo: «1. Monómios e polinómios», «2. Adição algébrica de monómios e polinómios», «3. Produto de um monómio por um polinómio», «4. Produto de polinómios», «5. Fórmula do quadrado do binómio», «6. Fórmula da diferença de quadrados», «7. Equações de grau superior ao primeiro. Lei do anulamento do produto», «8. Factorização de um polinómio. Resolução de equações» e «9. Complementos sobre decomposição de polinómios em factores (para alunos mais interessados nesta matéria)».

Na «Nota histórica» na margem da segunda página do separador, faz-se referência a Diofanto como sendo o mais importante de todos os algebristas gregos e apresenta-se um dos seus problemas mais conhecidos. Faz-se referência a Al-Khwarizmi e à sua obra mais importante, *Al-jahr wa'l muqawbalah*, e o provável significado de cada uma destas palavras.

As secções que se referem às equações do 2.º grau são as 7.ª e 8.ª. A sétima secção inicia-se com a questão «Qual é o número que elevado ao quadrado é igual a 36?» e escreve-se a equação que a traduz matematicamente. A partir dela, e usando os casos notáveis da multiplicação de polinómios, introduz-se a lei do anulamento do produto, fazendo-se a apresentação do símbolo $\vee$. Em seguida, no exemplo 1, resolve-se a equação de grau superior ao primeiro, $x(x-1)(2x+3)=0$ usando a lei do anulamento do produto.

A secção termina com 5 «Problemas propostos» desdobrados em várias alíneas. No primeiro exercício, pede-se para descobrir um provérbio resolvendo 19 equações usando a lei do anulamento do produto. Na segunda pede-se para usar a mesma lei, mas mentalmente, na resolução de 6 equações. Na terceira pede-se para identificar e resolver equações que podem ser resolvidas usando a lei do anulamento do produto e na quarta pede-se para identificar o erro que o Paulo cometeu na resolução de uma equação. No último, «Reflexão/Discussão», pede-se para escrever 6 equações, dadas as respetivas soluções.

A oitava secção inicia-se com a informação que «Factorizar um polinómio significa escrevê-lo como um produto de factores», dando-se 4 exemplos. Em seguida apresenta-se a resolução de 3 equações do 2.º grau usando a fatorização de polinómios e a lei do anulamento do produto.

A secção termina com 5 «Problemas propostos» desdobrados em várias alíneas. Os 4 primeiros são dedicados à fatorização de polinómios e a última, «Reflexão/Discussão», pede para descobrir mais um provérbio depois de resolver 21 equações do 1.º ou 2.º grau. O capítulo apresenta, no final, uma síntese da matéria, com palavras-chave / conhecimentos e capacidades específicas. A encerrar, a secção «Avaliação» tem 10 questões de escolha múltipla e 8 de desenvolvimento.

5. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) A equação $x^2 + 1 = 0$ tem duas soluções.

(B) A equação $(x-3)^2 + 4 = 0$ tem uma solução.

(C) Qualquer equação do 2.º grau tem pelo menos uma solução.

(D) Uma equação do 2.º grau pode ter uma solução, duas soluções ou nenhuma solução.

6. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

A equação $x(x-3) = 0$ é equivalente à equação:

(A) $-2x(x-3) = 0$. (B) $(x-1)(x-3) = 0$.

(C) $x - 3 = 0$. (D) $x = 0$.

Fig. 51 – As questões 5 e 6 de escolha múltipla.

5. Resolva cada uma das equações.

5.1 $32 = 2a^2$. 5.2 $(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right) = 0$.

5.3 $2x = x^2$. 5.4 $-x^2 = \frac{4}{2}$.

5.5 $a^2 + 4a + 4 = 0$. 5.6 $1 = \frac{x^2}{4}$.

Fig. 52 – A questão 5 de desenvolvimento.

No 9.º ano o estudo das equações do 2.º grau está localizado no quarto capítulo, na primeira parte (128 páginas), com o título «Equações do 2.º grau» (24 páginas) e está dividido em quatro secções: «1. Operações com polinómios. Casos notáveis da multiplicação de polinómios. Decomposição em factores (revisão)», «2. Resolução de equações do 2.º grau incompletas. Lei do anulamento do produto (revisão)», «3. Resolução de equações do 2.º grau completas. Fórmula resolvente» e «4. Resolução de problemas do 2.º grau».

A «Nota histórica», na margem da segunda página do separador, refere-se aos trabalhos com a equação do 2.º grau de Diofanto, Aryabhata, Al-Khwarizmi e Viète e apresenta-se um exemplo da resolução geométrica de uma equação por Al-Khwarizmi. O capítulo inicia-se com duas secções de revisões de assuntos já conhecidos dos alunos. Em seguida, numa terceira secção introduz-se, através de um problema geométrico, as equações do 2.º grau completas e a fórmula resolvente. Chama-se a atenção para a expressão $b^2 - 4ac$, relacionando-se o facto de esta ser maior, igual ou menor do que zero, com o número de raízes da equação. A dedução da fórmula resolvente surge numa nota, na margem da página (figura 53), usando-se linguagem algébrica fortemente apoiada pela linguagem natural.

Nota

Será difícil deduzir a fórmula resolvente?

Acompanhe esta dedução.

$$ax^2 + bx + c = 0\ ,\ \ a \neq 0$$

Dividem-se por a os termos da equação:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow\ x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Adiciona-se a cada membro $\frac{b^2}{4a^2}$ de modo a formar o quadrado de um binómio.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Aplica-se a definição de raiz quadrada.

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

Simplifica-se a expressão.

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

↑

Fórmula resolvente de qualquer equação do 2.º grau

Fig. 53 - Dedução da fórmula resolvente, numa nota à margem do texto.

A secção termina com 6 «Problemas propostos» desdobrados em várias alíneas. Os dois primeiros exercícios são de aplicação direta da fórmula resolvente, os 3 seguintes são problemas geométricos e no último, «Reflexão/Discussão», pede-se para escrever 4 equações do 2.º grau dadas as suas raízes, fazendo-se referência à forma $x^2 - Sx + P = 0$, onde S é a soma e P o produto das raízes.

A quarta secção diz respeito à resolução de problemas do 2.º grau.

O capítulo apresenta, ainda, uma síntese da matéria, com palavras-chave e conhecimentos e capacidades específicos – traduzir um problema por uma equação do 2.º grau, escrever uma equação do 2.º grau na forma canónica, resolver equações do 2.º grau incompletas, aplicar a fórmula resolvente na resolução de uma equação do 2.º grau, e resolver problemas formando e resolvendo equações. A encerrar o capítulo, a secção «Avaliação» tem 5 questões de escolha múltipla e 9 de desenvolvimento, que tanto incluem equações como problemas para resolver (figuras 54 e 55).

1. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

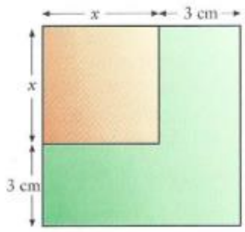
(A) A equação $(x-3)^2 = x^2$ é uma equação do 2.º grau.

(B) A equação $3x^2 - 3x = 5$ está escrita na forma canónica.

(C) Uma equação do 2.º grau pode não ter solução.

(D) A equação $(x-5)^2 = 16$ tem as soluções 4 e -4.

2. A figura representa dois quadrados, sendo um interior ao outro.
Qual das seguintes afirmações é verdadeira?



(A) Se o lado do quadrado duplica, a área duplica.

(B) Sabendo que área do quadrado maior é $64\ cm^2$, então, $x = 8$ cm.

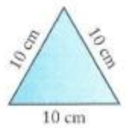
(C) A expressão $(x-3)^2 - x^2$ representa a área da parte colorida a verde.

(D) Se $x = 5$, a área da parte colorida a verde é $39\ cm^2$.

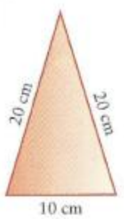
Fig. 54 – As duas primeiras questões de escolha múltipla.

8. Calcule a área de cada um dos triângulos.

8.1



8.2



9. O espaço, em metros, percorrido por um corpo em queda livre e sem atrito, é, aproximadamente, $e = 5t^2$, onde t representa o tempo, em segundos, desde o início da queda.

9.1 Do cimo de uma torre deixou-se cair uma moeda que demorou 3 segundos a chegar ao solo. Qual é a altura da torre?

9.2 Um pára-quedista lançou-se de um avião e percorreu em queda livre 720 m. Quanto tempo demorou a abrir o pára-quedas?

Fig. 55 - As duas últimas questões de desenvolvimento.

Análise

Organização e grafismo. Tal como já foi referido na apresentação destes manuais, o grafismo é bastante elaborado, recheado de cores e figuras ilustrativas, bem como de numerosos desenhos, esquemas, gráficos, tabelas, quadros e fotografias de suporte à resolução das questões propostas. Nas páginas existem espaços diferenciados, bastantes cores e marcas especiais. Todos os tópicos são abordados do mesmo modo e no mesmo número de páginas (basicamente 2 páginas com exposição e exemplos e outras 2 com exercícios). No final de cada secção, aparece uma pequena síntese sobre o assunto tratado. O corpo de letra é o usual e o entrelinhamento reduzido. Nestes manuais deixam de existir parágrafos numerados ou divisão por pontos, passando a organização a ser por subtemas tratados de forma padronizada. As frases são predominantemente curtas e diretas (por exemplo: «efectua-se o produto de polinómios»; «reduzem-se os termos semelhantes»). O texto está redigido numa mistura de linguagem natural e linguagem algébrica, com predomínio desta última. No 9.º ano, usa-se com frequência os símbolos $\Leftrightarrow$ e $\vee$.

Aspetos didáticos. Os manuais do 8.º e do 9.º anos apresentam uma extensa revisão de assuntos já estudados anteriormente. Na primeira parte de cada secção, os conceitos são introduzidos através de situações ou problemas numéricos, geométricos ou do quotidiano e apresentam-se diversos exemplos resolvidos. Na segunda, surgem questões para resolver, algumas das quais puramente matemáticas e outras contextualizadas. O final do capítulo apresenta, de novo, exemplos resolvidos e questões para resolver, bem como questões de dois níveis de dificuldade distintos (as mais simples são de escolha múltipla). Nunca surge a designação «exercício», em contrapartida, o termo «problema» aparece profusamente. A maior parte das questões são de complexidade reduzida. Na abordagem apresentada às equações, todas as situações partem do particular para o geral, ou seja, parte-se de vários exemplos (caso concreto) para depois se fazer a generalização (caso geral).

No 7.º ano, introduzem-se os princípios da multiplicação e da adição para depois no 8.º ano se falar nos princípios de equivalência. Também é só no 8.º ano que surgem as equações com denominadores.

A par da apresentação dos novos conceitos, os autores apresentam questões formuladas para ajudar os alunos a refletir sobre os mesmos e para testar a compreensão da leitura do texto. Também incluem a «Síntese» com o objetivo de os alunos organizarem o seu pensamento, indicando competências que são necessárias adquirir e que têm implicações noutras aprendizagens. Denota-se que nos «Problemas propostos», a sequência das questões é cuidadosamente organizada, tendo sido selecionadas para estimular o pensamento e testar a compreensão e competências dos alunos. As questões «Reflexão/Discussão» são dirigidas para discussão, envolvendo o pensamento dos alunos acerca de ideias matemáticas importantes e potencializando a comunicação. As questões de escolha múltipla servem para testar a aprendizagem, reforçando o raciocínio e a compreensão. Também para testar a aprendizagem, mas agora potencializando o cálculo, a resolução de problemas e o trabalho de apresentação de um texto matemático escrito, os autores incluíram as questões de desenvolvimento.

Os autores recorrem às novas tecnologias, computador e calculadoras, não apenas por recomendação do Ministério da Educação, mas também como motivação e enriquecimento das aprendizagens dos alunos (pág. 49, 7.º ano).

Aspetos fenomenológicos. Relativamente às páginas analisadas, existe um grande número de situações invocadas que são de natureza estritamente matemática. Há também problemas numéricos (pág. 32 e 53, 8.º ano, 1.ª parte, por exemplo) e inúmeros problemas geométricos em todos os manuais analisados.

Na abordagem às equações dos 1.º e 2.º graus, há apenas uma referência a outras ciências, neste caso, à física, no exercício proposto 9 na página 109.

Observa-se bastantes situações do quotidiano: problema de gelados (pág. 42, 7.º ano), um jogo de idades (pág. 43, 7.º ano), o Paulo e a bicicleta (pág. 50, 7.º ano), dinheiro (pág. 51, 7.º ano), número de litros de sumo (pág. 51, 7.º ano), visita de estudo ao Visionarium (pág. 33, 8.º ano, 1.ª parte), um problema sobre uma festa e outro sobre frutas (pág. 39, 8.º ano, 1.ª parte), um problema sobre água e outro sobre dinheiro das compras (pág. 35, 8.º ano, 1.ª parte), volume de uma caixa de cartão (pág. 47, 8.º ano, 1.ª parte), problemas sobre a área de carpetes quadradas em salas (pág. 96 e 107, 9.º ano), sobre a área de um jardim e outro sobre ruas (pág. 109, 9.º ano).

À exceção das notas históricas que constam nos separadores, não há mais nenhuma referência a elementos históricos.

Relativamente ao uso das tecnologias, estes manuais, como sinal dos tempos e de forma inovadora relativamente aos anteriores, convidam os alunos e professores a consultarem uma página na internet que contém um conjunto de materiais auxiliares para utilização ao longo do ano letivo. Na 2.ª parte do manual do 7.º ano (pág. 49) existe a sugestão de trabalhos de projeto ou de grupo recorrendo ao computador, usando a folha de cálculo e a programação em Visual Basic. Existe também várias fotografias de visores de máquinas calculadoras (pág. 45 e 46, 8.º ano, 1.ª parte; pág. 98, 9.º ano).

Conclusão

Os dois primeiros manuais escolares analisados são considerados «livros de autor» dado que foram elaborados por individualidades reconhecidas no meio académico e profissional. Os restantes já são considerados «livros de editora» em que os autores passaram a ser elementos secundários. Os programas oficiais são sempre invocados, como fonte de legitimidade, em todos os manuais analisados.

Estes livros constituem-se como um testemunho de uma significativa evolução no ensino das equações ao longo de quase 50 anos. Desde logo, a faixa etária dos alunos que estudam este conceito baixou dos 12 a 16 para os 12 a 14 anos. Ao mesmo tempo, a abordagem mais formal e abstrata foi dando origem a abordagens muito mais simples.

Os livros estão dirigidos a um público de jovens adolescentes, preocupando-se os autores em motivar os alunos, seja pela introdução de referências históricas (Calado), seja a partir de problemas e exemplos (em todos os livros), seja ainda pela introdução de figuras meramente decorativas (Neves, Guerreiro e Neves). Note-se que, ao contrário de todos os outros livros, nos de Costa, Osório e Lopes, na linha da matemática moderna, não se introduz os princípios de equivalência, procurando, numa fase inicial, resolver as equações atendendo à definição das operações numéricas e suas propriedades. Com base no trabalho feito numa fase inicial, apresenta orientações e formula regras práticas para a resolução de equações. A noção de identidade goza de uma presença primordial no livro de Calado, tendo desaparecido nos restantes manuais. A noção de igualdade aparece em todos os manuais analisados. Os livros de Calado e Sebastião e Silva e Silva Paulo, são os únicos que fazem referência a um processo gráfico de resolução de equações do 1.º grau, dada a imposição do programa oficial então em vigor. Nos manuais mais recentes a resolução de equações do 2.º grau envolvendo a aplicação da fórmula resolvente só aparece após algum trabalho com equações numéricas incompletas ou completas, recorrendo à transformação do primeiro membro num caso notável da multiplicação e à lei do anulamento do produto. Só depois se abordam as equações completas e se dão orientações e regras práticas para a resolução de equações de qualquer tipo. Um aspeto do movimento de didatização é a opção de partir de problemas em vez de se apresentar as equações sem qualquer motivação. É de registar, ainda, a inclusão de uma síntese com os pontos principais a recordar pelo aluno, que se torna num dos pontos recorrentes dos manuais de Neves, Guerreiro e Neves.

É de salientar, que ao longo do tempo os termos «exercício» e «problema» assumem diferentes significados. Nos primeiros manuais os exercícios são tarefas de grande complexidade e os problemas são um tipo particular de exercícios, com um enunciado em linguagem natural. Com o tempo, os exercícios passam a incluir uma grande diversidade de tarefas que, de modo geral, vão assumindo uma complexidade cada vez menor. Mais tarde, o termo «exercício» é substituído por «actividade» e, nos últimos manuais, o termo mais abrangente que designa todo o tipo de tarefas é «problema». Evidencia-se, assim, a grande capacidade de adaptação dos manuais, que se apropriam de termos usados em educação matemática, como «actividade» e «problema», conferindo-lhe um significado de acordo com os seus objetivos.

A natureza do texto muda substancialmente com o tempo. De um texto coeso, revelando grande preocupação de escrita, de Calado e Sebastião e Silva e Silva Paulo, passa-se para um texto mais informal de Costa, Osório e Lopes e Garcia, Osório e Ruivo, e daí para um texto segmentado em frases muito curtas e diretas em Neves, Guerreiro e Neves. Todos os livros visam apenas o leitor/aluno, à exceção dos de Neves, Guerreiro e Neves. Estes parecem visar tanto o aluno como o professor dado que a organização dos capítulos e das secções parece decorrer mais de uma lógica de organização de aulas do que propriamente de temas de leitura. Do ponto de vista da apresentação da matemática como uma disciplina com conexões múltiplas, internas e externas, os livros mais conseguidos são os de Neves, Guerreiro e Neves. Não só contêm problemas que remetem para situações do quotidiano como questões que estabelecem relações entre as equações e a geometria.

Como reflexo dos tempos, apenas os livros de Neves, Guerreiro e Neves propõem atividades que implicam o uso de calculadoras e computadores.

Em resumo, a evolução da apresentação do tema das equações mostra transformações consideráveis no sentido de tornar este conceito compreensível e atrativo para os alunos. O conjunto de assuntos tratados diminuiu consideravelmente. Existe atualmente, uma maior preocupação em ir ao encontro do aluno apresentando-lhe situações próximas da sua experiência e da sua realidade. Porém, a preocupação com a simplificação e a atratividade da mensagem levou a um estilo de escrita de cunho extremamente esquemático e a uma abundância de elementos decorativos distratores. Também o facto do livro já não se dirigir apenas ao aluno, mas também ao professor, é um fator que, muito provavelmente, pesa aquando da sua conceção e produção e, como é inevitável, nos seus efeitos junto do aluno que o usa para estudar matemática. Por fim, as potencialidades proporcionadas pelas novas tecnologias, permitem prever que as mudanças vão continuar, talvez de forma ainda mais acentuada do que até agora.

5. Considerações finais

Situando-se no âmbito da História do Ensino da Matemática, o presente estudo propôs-se ajudar a conhecer o contributo dado pelo professor José Sebastião e Silva para o processo ensino-aprendizagem da matemática, em geral, e para as equações dos 1.º, 2.º e 3.º graus, em particular, a partir do *Compêndio de Matemática*. Para isso, começou-se por fazer um enquadramento histórico, caracterizando-se os contextos sociopolítico e educativo dos anos 50 e 60 do século passado em Portugal.

A nova conceção do ensino de matemática colocou novos desafios que obrigaram a repensar as práticas educacionais, a organização das escolas e as finalidades e conteúdos do ensino. No início dos anos sessenta ganhou força o movimento da matemática moderna causando grande impacto nos conteúdos e nos métodos de ensino na disciplina de matemática. O grande impulsionador deste movimento em Portugal foi José Sebastião e Silva, autor de novos programas e de textos de apoio para alunos e professores. Mas «em vez de uma substituição da Matemática tradicional pela Matemática moderna, o que se verificou foi uma simbiose entre as duas. E as aplicações da Matemática, apesar das boas intenções iniciais, acabaram por desaparecer dos programas e dos manuais escolares». (Ponte, Boavida, Graça & Abrantes, 1997, p. 52)

Ao proceder-se a uma leitura mais cuidada do *Compêndio de Matemática* e do *Guia* constata-se que estes estão recheados de uma visão pedagógica ímpar de grande modernidade, exposta com grande clareza e lucidez de valor ainda atual, intercalados com considerações culturais, históricas e filosóficas. A clareza da exposição, muitas vezes construída em diálogo com os alunos, tal qual Sócrates em diálogo com os seus discípulos, era muito valorizada pelo professor Sebastião e Silva. Para ele, o diálogo entre os alunos e o mestre era um aspeto fundamental e basilar na construção do conhecimento.

No guia que acompanhou o *Compêndio de Matemática*, Sebastião e Silva desenvolveu mais uma vez as «ideias condutoras do seu pensamento, que bem esclarecem a sua atitude perante o ensino secundário» e, segundo Gil (1982, p. 134), «a coerência é perfeita».

Percebe-se que a intenção do professor ao conceber o *Compêndio de Matemática* foi de preparar os alunos e os professores para a utilização da álgebra, e das equações em particular, a um nível mais avançado. A intenção de José Sebastião e Silva foi de dar uma forma cientificamente correta e exigente, garantindo assim uma nova abordagem da matemática, uma essência algébrica da matemática.

No período de tempo em estudo neste trabalho, as equações marcam presença nos programas de matemática portugueses. É de salientar que, com o programa de 1991, as equações dos 1.º e 2.º graus passaram a ser ministradas apenas no ensino básico mas constituindo-se como uma ferramenta indispensável para o estudo de outros assuntos no ensino secundário. Em consequência, a faixa etária dos alunos que estudam as equações baixou de 12 a 15 para 12 a 14 anos. Também se constata que a discussão de equações foi eliminada dos programas. No que diz respeito às equações do 3.º grau, o seu ensino não está previsto, explicitamente, em nenhum programa referente ao período de tempo em análise neste trabalho. Apenas no programa do 8.º ano de 1991, nas sugestões metodológicas para o estudo das equações de grau superior ao 1.º, se refere que se poderá resolver equações do tipo $x^3 - x = 0$ usando a combinação muito simples da colocação de um fator em evidência e dos casos notáveis da multiplicação.

Os manuais escolares atuais, embora atraentes, são extensos, por vezes com exercícios em demasia e alguns deles com artifícios desnecessários. A repetição exagerada de exercícios, sem escolha criteriosa, pode levar a uma aprendizagem puramente mecânica. Pelo contrário, não desprezando embora as rotinas indispensáveis à aprendizagem, a reflexão sobre alguns bons exercícios, imaginando novos problemas, generalizando, variando dados, prevendo e criticando resultados, estimula o gosto do aluno, desenvolve a imaginação e a intuição, o ensino ganha nova vida e conduz, com interesse, à aprendizagem esquemática, aquela que poderá perdurar e ser transferida aos mais variados campos do saber. (Lima, 1997)

Dos manuais escolares analisados, pode-se afirmar que os de António Almeida Costa, Alfredo Osório dos Anjos e António Augusto Lopes e Madalena Garcia, Alfredo

Osório e António Ruivo foram os herdeiros pedagógicos dos manuais de José Sebastião e Silva, dado que é nestes que a «presença» das ideias deste se torna mais visível.

Por fim, e do ponto de vista da investigação histórica, seria interessante estudar em que medida os manuais escolares analisados são representativos dos manuais portugueses das diversas épocas e que períodos históricos se podem demarcar relativamente ao ensino das equações. Outra questão que seria interessante analisar, é a relação entre a evolução verificada em Portugal e noutros países, nas equações e noutros conceitos importantes do currículo de matemática, à luz dos grandes movimentos de reorientação do ensino desta disciplina. Um desses conceitos importantes do currículo seria, por exemplo, o corpo dos números complexos cujo estudo, após a presente investigação sobre as equações, se revela bastante oportuno. Pretende-se, assim, alargar os limites do conhecimento existente.

«A melhor homenagem que podemos fazer a José Sebastião e Silva é acreditar no valor social e formativo da Matemática e ensiná-la com paixão». (Lima, 1997, p. 111)

Referências bibliográficas

Abreu, M. (2011). *Compêndio de Matemática de Sebastião e Silva: Cálculo Diferencial.* Dissertação de mestrado. Aveiro: Universidade de Aveiro.

André, M. & Menga, L. (2005). *Pesquisa em educação: Abordagens qualitativas*. Coleção: Temas Básicos de Educação e Ensino. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária.

Bebiano, N. (2006). Ruy Luís Gomes – vida e obra. *Gazeta de Matemática*, 151, 6-16.

Bogdan, R. & Bicklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Boyer, C. (2001). *História da Matemática*. São Paulo: Editora Edgard Blücher, Ltda.

Calado, J. J. G. (1965). *Compêndio de Álgebra*. Lisboa: Livraria Sá da Costa.

Carvalho, R. (1986). *História do Ensino em Portugal. Desde a fundação da nacionalidade até o fim do regime de Salazar - Caetano*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Castelnuovo, E. (1982). *Para um ensino da matemática capaz de produzir cultura científica.* Ensino da Matemática – Anos 80. Actas do colóquio realizado no âmbito do encontro internacional de homenagem a José Sebastião e Silva. 29-41. Lisboa: S.P.M.

Choppin, A. (1980). L`histoire des manuels scolaires: une approche global. *Histoire de l`Éducation*, 9, 1-25.

Claus, H. (1995). *Einführung in die Didaktik der Mathematik.* Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt.

Cohen, L. & Manion, L. (1986). *Research methods in education*. Second edition. London: Croom Helm.

Costa, A. A., Anjos, A. O. & Lopes, A. A. (1986a). *Matemática Jovem 7*. Porto: Porto Editora.

Costa, A. A., Anjos, A. O. & Lopes, A. A. (1986b). *Matemática Jovem 8*. Porto: Porto Editora.

Costa, A. A., Anjos, A. O. & Lopes, A. A. (1986c). *Matemática Jovem 9*. Porto: Porto Editora.

Departamento da Educação Básica. (1991). *Programa Matemática. Plano de Organização do Ensino - Aprendizagem – Volume II.* Lisboa: Ministério da Educação.

Departamento da Educação Básica. (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação.

Departamento de Matemática da F.C.U.L. (1997). *Actas do Colóquio de Homenagem realizado em 12 de Dezembro de 1997 na Torre do Tombo*. Lisboa: Departamento de Matemática da F.C.U.L.

Direcção-Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

Esteves, S. (2013). *O contributo de António de Almeida Costa na Matemática Moderna em Portugal.* Dissertação de mestrado. Lisboa: Universidade Nova de Lisboa.

Estrada, F., Sá, C., Queiró, J., Silva, M. & Costa, M. (2000). *História da Matemática.* Lisboa: Universidade Aberta.

Ferreira, J. C. (1997). *José Sebastião e Silva – Testemunho de um discípulo.* Actas do Colóquio de Homenagem realizado em 12 de Dezembro de 1997 na Torre do Tombo. 19-32. Lisboa: D.M. – F.C.U.L.

Garcia, M. (1982). *Algumas reflexões sobre o ensino da geometria em Portugal.* Ensino da Matemática – Anos 80. Actas do colóquio realizado no âmbito do encontro internacional de homenagem a José Sebastião e Silva. 148-155. Lisboa: S.P.M.

Garcia, M., Osório & A., Ruivo, A. (1980a). *Compêndio de Matemática – 10.º ano de escolaridade. 1.º volume*. Porto: Porto Editora.

Garcia, M., Osório & A., Ruivo, A. (1980b). *Compêndio de Matemática – 10.º ano de escolaridade. 2.º volume*. Porto: Porto Editora.

Gil, J. M. (1982). *A matemática do ensino secundário no pensamento de Sebastião e Silva e nos anos oitenta.* Ensino da Matemática – Anos 80. Actas do colóquio realizado no âmbito do encontro internacional de homenagem a José Sebastião e Silva. 131-138. Lisboa: S.P.M.

Greenes, C. & Rubenstein, R. (2008). *Algebra and algebraic thinking in school mathematics*. U.S.A.: National Council of Teachers of Mathematics.

Guimarães, A. A. (1972). *Vida e Obra do Professor José Sebastião e Silva*. Porto: não publicado. Acedido em 27 de outubro de 2012, em http://www.esec-sebastiao-silva.rcts.pt/JSS/biograf/entrada.htm

Lima, Y. (1997). *Modernização da Matemática no Liceu: um programa inédito de Sebastião e Silva.* Actas do Colóquio de Homenagem realizado em 12 de Dezembro de 1997 na Torre do Tombo. 99-114. Lisboa: D.M. – F.C.U.L.

Marques, A. H. O. (2012). *Breve História de Portugal*. Queluz de Baixo: Editorial Presença.

Matos, J. M. (1989). *Cronologia recente do ensino da Matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Matos, J. (2006). História do ensino da matemática em Portugal: constituição de um campo de investigação. *Revista Diálogo Educacional*, 6 (18), 11-18.

Ministério da Educação e Cultura. (1974). *Matemática. Programa para o ano lectivo 1974/1975*. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação e Cultura.

National Council of Teachers of Mathematics (1994). *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar*. Lisboa: A.P.M. e I.I.E.

Neves, M. A. F., Guerreiro, L. & Neves, A. (2002). *Matemática 7.º (2.ª Parte)*. Porto: Porto Editora.

Neves, M. A. F., Guerreiro, L. & Neves, A. (2008). *Matemática 9.º (1.ª Parte)*. Porto: Porto Editora.

Neves, M. A. F., Guerreiro, L. & Neves, A. (2009a). *Matemática 8.º (1.ª Parte)*. Porto: Porto Editora.

Neves, M. A. F., Guerreiro, L. & Neves, A. (2009b). *Matemática 8.º (2.ª Parte)*. Porto: Porto Editora.

Nunes, P. (2010). *Obras. Vol VI. Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria*. Academia das Ciências de Lisboa. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Oliveira, A. F. (1982). *Aspectos lógicos e formativos do ensino da matemática.* Ensino da Matemática – Anos 80. Actas do colóquio realizado no âmbito do encontro internacional de homenagem a José Sebastião e Silva. 157-168. Lisboa: S.P.M.

Ponte, J. P. (2003). *O ensino da matemática em Portugal: Uma prioridade educativa?* in O ensino da Matemática: Situação e perspectivas. Lisboa: Conselho Nacional de Educação.

Ponte, J. P. (2004). As equações nos manuais escolares. *Revista Brasileira de História da Matemática*, 4 (8), 149-170.

Ponte, J. P., Salvado, C., Fraga, A., Santos, T. & Mosquito, E. (2007). Equações do 2.º grau do fim do século XIX ao início do século XXI: Uma análise de sete manuais escolares. *Quadrante*, 16 (1), 111-145.

Ponte, J. P., Branco, N. & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação – Direcção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

Ponte, J. P., Boavida, A. M., Graça, M. & Abrantes, P. (1997). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Ministério da Educação – Departamento do Ensino Secundário.

Schubring, G. (2003). *Análise Histórica de Livros de Matemática. Notas de Aula*. Campinas: Editora Autores Associados.

Schubring, G. (2005). *Pesquisar sobre a história do ensino da matemática: metodologia, abordagens e perspectivas*. História do ensino da matemática em Portugal. Actas do XIII Encontro de Investigação em Educação Matemática. Organização de D. Moreira e J. M. Matos. 5-20. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Sierra-Vásquez, M., González-Astudillo, M. T. & López-Esteban, C. (2003). El concepto de continuidad em los manuales españoles de enseñanza secundaria de la segunda mitad del siglo XX. *Educación Matemática,* 15, 21-49.

Silva, J. C. (1995). O pensamento pedagógico de José Sebastião e Silva. *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, 32, 101-114.

Silva, J. S. (1975a). *Compêndio de Matemática. Curso complementar do ensino secundário. Vol.1.Tomo 1.* Lisboa: G.E.P. (Versão digital: D.M. – F.C.U.L.)

Silva, J. S. (1975b). *Compêndio de Matemática. Curso complementar do ensino secundário. Vol.1.Tomo 2*. Lisboa: G.E.P. (Versão digital: D.M. – F.C.U.L.)

Silva, J. S. (1975c). *Compêndio de Matemática. Curso complementar do ensino secundário. Vol.3.* Lisboa: G.E.P. (Versão digital: D.M. – F.C.U.L.)

Silva, J. S. (1975d). *Guia para a Utilização do Compêndio de Matemática (1.º Volume).* Lisboa: Edição G.E.P. (Versão digital: D.M. – F.C.U.L.)

Silva, J. S. (1976). *Compêndio de Matemática. Curso complementar do ensino secundário. Vol.2.* Lisboa: G.E.P. (Versão digital: D.M. – F.C.U.L.)

Silva, J. S. (1977). *Guia para a Utilização do Compêndio de Matemática (2.º e 3.º Volumes).* Lisboa: Edição G.E.P. (Versão digital: D.M. – F.C.U.L.)

Silva, J. S. (1978). *Compêndio de Matemática. Ano Propedêutico. Vol. 1, Tomo 2.* Lisboa: G.E.P.

Silva, J. S. (2000). *A Matemática na Antiguidade. Texto baseado em notas das lições de História do Pensamento Matemático do* ***Professor José Sebastião e Silva***. Lisboa: S.P.M.

Silva, J. S. & Paulo, J. D. S. (1963a). *Compêndio de Álgebra. Tomo I – VI Ano*. Lisboa: Livraria Popular de Francisco Franco.

Silva, J. S. & Paulo, J. D. S. (1963b). *Compêndio de Álgebra. Tomo II – VII Ano*. Lisboa: Livraria Popular de Francisco Franco.

Silva, M. I. (2005). *Os números imaginários: (um estudo sobre) a sua «realidade»*, Dissertação de mestrado. Braga: Universidade do Minho.

S.P.M. (1982a). Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática, n.º 5, Novembro. Lisboa: S.P.M.

S.P.M. (1982b). *Ensino da Matemática – Anos 80. Actas do colóquio realizado no âmbito do encontro internacional de homenagem a José Sebastião e Silva*. Lisboa: S.P.M.

S.P.M. (2003). Entrevista com Madalena Garcia. *Gazeta de Matemática*, 144, 4-7.

Struik, D. (1997). *História concisa das matemáticas.* Lisboa: Gradiva.

Teixeira, F. G. (1934). *História das Matemáticas em Portugal*. Coimbra: Imprensa da Universidade.

Valente, W. (2007). História da Educação Matemática: interrogações metodológicas. *Revista Eletrônica de Educação Matemática.* V2.2, 28-49.

Referências legislativas

Decreto-lei n.º 36 507, de 17 de setembro de 1947. *Diário do Governo n.º 216 – I Série*. Ministério da Educação Nacional. Lisboa.

Decreto n.º 36 508, de 17 de setembro de 1947. *Diário do Governo n.º 216 – I Série*. Ministério da Educação Nacional. Lisboa.

Decreto-lei n.º 38 968, de 27 de outubro de 1952. *Diário do Governo n.º 241 – I Série*. Ministério da Educação Nacional. Lisboa.

Decreto n.º 39 807, de 7 de setembro de 1954. *Diário do Governo n.º 198 – I Série*. Ministério da Educação Nacional. Lisboa.

Decreto-lei n.º 40 964, de 31 de dezembro de 1956. *Diário do Governo n.º 284 – I Série*. Ministério da Educação Nacional. Lisboa.

Decreto-lei n.º 42 994, de 28 de maio de 1960. *Diário do Governo n.º 125 – I Série*. Ministério da Educação Nacional. Lisboa.

Decreto n.º 45 418, de 9 de dezembro de 1963. *Diário do Governo n.º 288 – I Série*. Ministério da Educação Nacional. Lisboa.

Decreto-lei n.º 45 810, de 9 de julho de 1964. *Diário do Governo n.º 160 – I Série*. Ministério da Educação Nacional. Lisboa.

Decreto-lei n.º 46 135, de 31 de dezembro de 1964. *Diário do Governo n.º 305 – I Série*. Ministério da Educação Nacional. Lisboa.

Decreto-lei n.º 46 136, de 31 de dezembro de 1964. *Diário do Governo n.º 305 – I Série*. Ministério da Educação Nacional. Lisboa.

Decreto-lei n.º 46 156, de 16 de janeiro de 1965. *Diário do Governo n.º 13 – I Série*. Ministério da Educação Nacional. Lisboa.

Decreto-lei n.º 47 311, de 12 de novembro de 1966. *Diário do Governo n.º 263 – I Série*. Ministério da Educação Nacional. Lisboa.

Decreto-lei n.º 47 480, de 2 de janeiro de 1967. *Diário do Governo n.º 1 – I Série*. Ministério da Educação Nacional. Lisboa.

Decreto-lei n.º 485, de 2 de dezembro de 1972. *Diário do Governo n.º 280 – I Série*. Ministério da Educação Nacional. Lisboa.

Decreto-lei n.º 491, de 23 de novembro de 1977. *Diário da República n.º 271 – I Série*. Ministério da Educação e Investigação Científica. Lisboa.

Decreto-lei n.º 240, de 19 de julho de 1980. *Diário da República n.º 165 – I Série*. Ministério da Educação e Ciência. Lisboa.

Decreto-lei n.º 261, de 17 de julho de 2007. *Diário da República n.º 136 – I Série*. Ministério da Educação. Lisboa.

Lei n.º 47, de 28 de agosto de 2006. *Diário da República n.º 165 – I Série*. Ministério da Educação. Lisboa.

Parecer da Junta Nacional da Educação, de 24 de junho de 1950. *Diário do Governo n.º 145 – II Série*. Ministério da Educação Nacional. Lisboa.

Parecer da Junta Nacional da Educação, de 27 de abril de 1963. *Diário do Governo n.º 100 – II Série*. Ministério da Educação Nacional. Lisboa.

Parecer da Junta Nacional da Educação, de 24 de fevereiro de 1965. *Diário do Governo n.º 46 – II Série*. Ministério da Educação Nacional. Lisboa.

Parecer da Junta Nacional da Educação, de 8 de maio de 1968. *Diário do Governo n.º 110 – II Série*. Ministério da Educação Nacional. Lisboa.

Programa de Matemática para o curso complementar dos liceus, de 27 de junho de 1973. *Diário do Governo n.º 149 – II Série*. Ministério da Educação Nacional. Lisboa.